



ISSN 2410-2547

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПІР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 100

Заснований у 1965 р.

КИЇВ 2018

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Головний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник головного редактора *С.О. Пискунов*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

<i>П.В. Алявдін</i> , д-р техн. наук (Польща)	<i>А.В. Перельмутер</i> , д-р техн. наук
<i>Ю. Аткичунас</i> , д-р техн. наук (Литва)	<i>О.Ф. Даценко</i> , д-р техн. наук
<i>О.М. Белостоцький</i> , д-р техн. наук (Росія)	<i>П.В. Ясній</i> , д-р техн. наук
<i>І. Елішаков</i> , д-р техн. наук (США)	<i>В.В. Гайдайчук</i> , д-р техн. наук
<i>С.Н. Кривошапко</i> , д-р техн. наук (Росія)	<i>Г.М. Іванченко</i> , д-р техн. наук
<i>С.Ю. Фіалко</i> , д-р техн. наук (Польща)	<i>П.П. Лізунов</i> , д-р техн. наук
<i>Чан Дик Тінг</i> , д-р техн. наук (В'єтнам)	<i>І.І. Солодей</i> , д-р техн. наук
<i>Л.М. Лобанов</i> , д-р техн. наук, академік НАН України	

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 25 травня 2018 р. (протокол №14).

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 100 / Голов. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2018. – 216 с. – Укр. та англ. мовами.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробничників, докторантів, аспірантів та студентів.

Індексація і партнери



<http://opir.knuba.edu.ua/>
Адреса редакційної колегії:
КНУБА, Повітрофлотський пр., 31.
м. Київ, 03037
Тел.: (044) 248-3040
E-mail: omtc@knuba.edu.ua

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61
© КНУБА, 2018

UDC 539.3

INVARIANT TORUS BREAK-DOWN IN VIBROIMPACT SYSTEM – ROUTE TO *CRISIS* ?

V.A. Bazhenov,

Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the Ukraine National Academy of Pedagogical Sciences

O.S. Pogorelova,

Candidate of Physico-mathematical Sciences, Senior Research Officer, Senior Research Officer

T.G. Postnikova,

Candidate of Engineering Sciences, Senior Research Officer, Senior Research Officer

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Povitroflotsky ave., 31, Kyiv, 03680*

Abstract. Chaotic vibrations of dynamical systems and their routes to chaos are interesting and investigated subjects in nonlinear dynamics. Particularly the routes to chaos in non-smooth dynamical systems are of the special scientists' interest. In this paper we study quasiperiodic route to chaos in nonlinear non-smooth discontinuous 2-DOF vibroimpact system. The break-down of invariant torus or of the closed curve occurs just under the quasiperiodic route to chaos. Is it route to crisis? In narrow frequency range different oscillatory regimes have succeeded each other many times under very small control parameter varying. There were periodic subharmonic regimes – chatters, quasiperiodic, and chaotic regimes, the zones of prechaotic and postchaotic motion. The hysteresis effects (jump phenomena) occurred for increasing and decreasing frequencies. The observed chaos was the transient one. The chaoticity of obtained regime has been confirmed by typical views of Poincaré map and Fourier spectrum, by the positive value of the largest Lyapunov exponent, and by the fractal structure of Poincaré map. These investigations confirm the theory by Newhouse, Ruelle, and Takens who suggested a new bifurcation scenario where a periodic solution produces subsequently a torus and then a strange attractor.

Keywords: vibroimpact system, dynamical behaviour, quasiperiodic, chaotic, subharmonics, Poincaré map, Fourier spectrum, Lyapunov exponent, fractal structure.

1. Introduction

Nonlinear dynamics is relatively young science. It has begun to develop rapidly only at the end of 20-*th* century. One of the most interesting and explored subjects on nonlinear dynamics are the chaotic vibrations. The routes of dynamical systems to chaos are of the special scientists' interest. There are many papers, monographs and textbooks about dynamic behaviour in general and routes to chaos in particular in nonlinear systems [1-6].

Just deterministic chaos is not the exceptional regime of dynamical system behaviour. On the contrary such regimes are observed in many dynamical systems in mathematics, physics, mechanics, biology, medicine. Recent such investigations appear in economics and sociology more and more often. For example Professor D. Volchenkov (Texas Tech University) is doctor of sciences, expert on theoretical physics, mathematics, and nonlinear dynamics. He is editor in chief of International Journal “Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity”. Nevertheless at present his studies devote to sociology problems [7, 8].

Therefore the investigations on nonlinear dynamics in general and on chaotic dynamics in particular are one of the arterial ways in the contemporary natural science development.

The term *crisis* was one of the new words coined by C. Grebodgi et al. [9]. It is used to denote a sudden change in the chaotic state when some system parameter is changed. For example a system initially in a chaotic state may suddenly become periodic. Or chaotic motion which was originally confined to a limited range of $x(t)$ may suddenly expand to a broad range $x(t)$.

It is known that the studying of non-smooth dynamical systems with discontinuous right-hand side has some difficulties. So dynamical processes in non-smooth systems are studied less. In works [10,11] authors divide non-smooth discontinuous dynamical systems into three types according to their degree of discontinuity. There are among them Fillipov systems and the impacting systems with velocity reversals. Moreover the systems with impacts between its elements have the grossest form of nonlinearity and the non-smoothness. Many new phenomena unique to non-smooth systems are observed under variation of system parameters. Recently the investigations of such systems are developed rapidly. Especially systems with impacts are of the particular interest for scientists. Exactly in such systems the discontinuous dangerous bifurcations are arising under system parameters variation. Just such hard bifurcations can portend the *crisis*.

Vibroimpact system is strongly nonlinear non-smooth one; the set of differential equations of motion contains the discontinuous right-hand side. The studying of vibroimpact system dynamic behaviour both in general and for concrete system is of the special interest. In particular the routes to chaos in such systems also are of the special interest. It is well known that completely deterministic dynamic system may begin to behave by unforeseen chaotic manner when any accidental influence is absent. However, in this unpredictability it is possible to identify a number of regularities in the system behaviour which distinguishes this phenomenon from the classical random processes. Moreover, in contrast to the classical random processes, the phenomenon of deterministic chaos can be reproduced in natural, laboratory and numerical experiments. It is known three main routes to chaos in dynamical systems [1,3]:

- period-doubling route to chaos – the most celebrated scenario for chaotic vibrations;
- quasiperiodic route to chaos;
- route to chaos via intermittency by Pomeau and Manneville: the long periods of periodic motion with bursts of chaos; as one varies a parameter the chaotic bursts become more frequent and longer [12].

The invariant torus break-down, or breakup of the closed curve provides just quasiperiodic route to chaos. In [13] the authors consider the mathematical side of this problem. They suggest some hypotheses and formulate theorem where three possibilities are given:

- The stable and unstable periodic orbits vanish through a bifurcation.
- Stable and unstable manifolds of the unstable periodic orbit intersect tangentially to form a homoclinic orbit.
- The stable periodic orbit loses stability.

The authors write at the paper end: "The further experimental and numerical studies of mentioned problems have to confirm or to refuse these hypotheses".

In [4] there is section “Universal properties of the route from quasiperiodicity to chaos”. The author considers this problem in the main via maps. Recently the problem of torus break-down was considered for example in [14-17].

We use different characteristics in order to be sure that obtained oscillatory regime is chaotic one.

Poincaré maps are one of the principal ways of recognizing chaotic vibrations in low-degree of freedom problems. Poincaré maps and phase plane portraits can often provide graphic evidence for chaotic behaviour and the fractal properties of strange attractors. Poincaré maps help to distinguish between various qualitative states of motion such as periodic, quasiperiodic, or chaotic. But quantitative measures of chaotic dynamics are also important and in many cases are the only hard evidences for chaos. One of the significant characteristics is Fourier distribution of frequency spectra. The difference between chaotic and quasiperiodic motion can be detected by taking the Fourier spectrum of the signal. A quasiperiodic motion will have the well-pronounced peaks at basic frequencies and at their combinations, chaotic motion – a broad continuous spectrum of Fourier components.

Chaos in dynamics implies a sensitivity of the outcome of a dynamical process to changes in initial conditions. Small uncertainties in initial conditions lead to divergent orbits in the phase space. Small changes in initial conditions (or in some other parameters such as, for example, the amplitude or frequency of exciting force, damping coefficient) can dramatically change the type of output from a dynamical system.

Lyapunov exponents characterize the kind of dynamical system motion because they measure the divergence rate of nearby trajectories. In order to have a criterion for chaos one need only calculate the largest exponent λ which tells whether nearby trajectories diverge ($\lambda > 0$) or converge ($\lambda < 0$) on the average. Its sign is chaos criterion. For regular motions $\lambda \leq 0$, but for chaotic motion $\lambda > 0$ that is positive Lyapunov exponent imply chaotic dynamics.

There are some difficulties with Lyapunov exponents determination for non-smooth systems especially for discontinuous systems with impacts. These difficulties are caused by the discontinuity of motion equations right-hand sides. The Jacobian matrix which is used in Benettin’s algorithm of Lyapunov exponent calculation is also discontinuous. At present there are several propositions for Lyapunov exponents calculation in non-smooth systems. The authors of these propositions describe their own methods for such estimation [18-20].

One can consider the fractal structure of Poincaré map as visit card of chaotic motion. When the motion is chaotic, a mazelike, multisheeted structure in section may appear. This threadlike collection of points seems to have further structure when examined on a finer scale. The term *fractal* characterizes such Poincaré patterns. So the fractal dimension of chaotic attractor is one of the principal measures of chaos.

In [1] the author advises not to rely on one measure of chaos in dynamical experiments, but to use two or more techniques such as Poincaré maps, Fourier spectra, Lyapunov exponents or fractal dimension measurements before pronouncing a system chaotic or strange.

When we say about quasiperiodic route to chaos we have to bear in mind that in this case the whole picture is found sufficiently complicated. Its many aspects remain not studied to the end so far. Attractor evolution under governing parameter changing may be various and complicated. Quasiperiodic and periodic regimes may alternate and undergo different bifurcations.

The goals of this paper are the following:

1) To study by numerical simulation the picture of invariant torus (or closed curve) break-down that is the quasiperiodic route to chaos in 2-DOF two-body vibroimpact system.

2) To evaluate the chaoticity of obtained oscillatory regimes by several quantitative and qualitative characteristics such as Poincaré maps, Fourier spectra, the largest Lyapunov exponents, and fractal structure of Poincaré map.

3) To confirm or to refuse the hypotheses about breakup of invariant torus formulated earlier.

2. The background for studying of quasiperiodic route to chaos in vibroimpact system

We have studied the dynamic behaviour of 2-DOF two-body vibroimpact system (Fig. 1) in our previous works [21-23]. Therefore we'll give only short problem description.

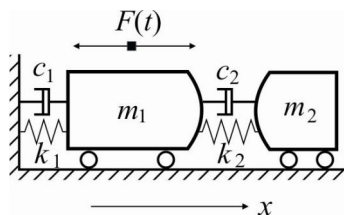


Fig. 1

This model is formed by the main body m_1 and attached one m_2 , which can play the role of percussive or non-percussive dynamic damper. Bodies are connected by linear elastic springs with stiffness k_1 and k_2 and dampers with damping coefficients c_1 and c_2 . (The damping force is taken as proportional to first degree of velocity with coefficients c_1 and c_2 .)

The differential equations of its movement are:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 - \omega_1^2x_1 - 2\xi_2\omega_2\chi(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) + \frac{1}{m_1}[F(t) - F_{con}(x_1 - x_2)], \\ \ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_3(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2(x_2 - x_1 - D) + \frac{1}{m_1}F_{con}(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

where $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$, $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$; $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $\chi = \frac{m_2}{m_1}$.

External loading is periodic one: $F(t) = P \cos(\omega t + \varphi_0)$, $T = 2\pi/\omega$ is its period.

Impact is simulated by contact interaction force F_{con} according to contact quasistatic Hertz's law:

$$\begin{aligned} F_{con}(z) &= K[H(z)z(t)]^{3/2}, \\ K &= \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}, \\ \delta_1 &= \frac{1 - \mu_1^2}{E_1\pi}, \quad \delta_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2\pi}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $z(t)$ is the relative closing in of bodies, $z(t) = x_2 - x_1$, A , B , and q are constants characterizing the local geometry of the contact zone; μ_i and E_i are respectively Poisson's ratios and Young's modulus for both bodies, $H(z)$ is the discontinuous step Heviside function. The numerical parameters of this system are following:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1000 \text{ kg}, & \omega_1 &= 6.283 \text{ rad/s}, & \xi_1 &= 0.036, & E_1 &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^2, & \mu_1 &= 0.3, \\ m_2 &= 100 \text{ kg}, & \omega_2 &= 5.646 \text{ rad/s}, & \xi_2 &= 0.036, & E_2 &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^2, & \mu_2 &= 0.3, \\ P &= 500 \text{ N}, & A &= B = 0.5 \text{ m}^{-1}, & q &= 0.318. \end{aligned}$$

We have obtained loading curves [22] and amplitude-frequency response [23] in wide range of control parameter by parameter continuation method. Periodic motion stability or instability was determined by matrix monodromy eigenvalues that is by Floquet multipliers' values. The periodical solution is becoming unstable one if even though one Floquet multiplier leaves the unit circle in complex plane that is its modulus becoming more than unit.

Global view of amplitude-frequency response for both vibroimpact system

bodies is presented at Fig. 2 in wide range of excitation frequency. The upper curve corresponds to attached body (m_2), the lower one – to main body (m_1). Unstable regimes are dotted by grey colour. At axis of ordinates we have semi-amplitude A_{\max} . It

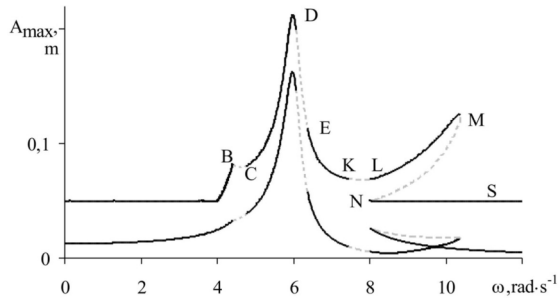


Fig. 2. Amplitude-frequency response

means half the peak-to-peak amplitude. For the nonharmonic oscillation it is calculated by the formula $A_{\max} = \frac{|x_{\max}| + |x_{\min}|}{2}$.

There are some regions of instability of main (1,1)-regime¹ (T -periodic regime with 1 impact per cycle): BC , DE , KL , MN . In this paper we study dynamic behaviour of vibroimpact system in frequency range $7.45 \text{ rad/s} < \omega < 8.0 \text{ rad/s}$ that is at region KL . Partial view of amplitude-frequency response in instability zone KL is presented at Fig. 3(a). At points K and L stable (1,1)-regime is losing stability, the quasiperiodic regimes are arising as a result of Neimark-Sacker bifurcations. The two complex conjugate multipliers μ and μ^* are leaving the unit circle (Fig. 3(b)).

¹ The mark (n,k) means nT -periodic vibration with k impacts per cycle [24], T is period of external loading $T = 2\pi/\omega$.

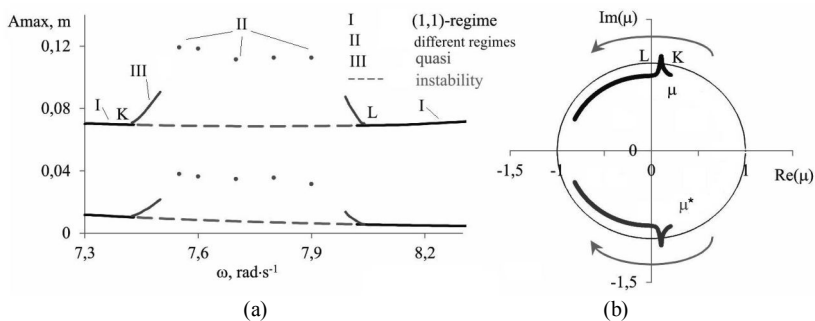


Fig. 3. Partial view of amplitude-frequency response (a) and multipliers behaviour (b) in KL region

After the stability loss at bifurcation points K and L the second basic oscillatory frequency is arising $\omega_1 = \frac{1}{T}(\arg \mu + 2k\pi)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (the argument of complex number is determined with accuracy $\pm 2k\pi$) [3]. This frequency ω_1 is not commensurate with first basic frequency ω . So the branching dynamical state is quasiperiodic one. Simultaneous time trace of phase plane motion and Poincaré map of this regime for $\omega = 7.46 \text{ rad/s}$ are depicted at Fig. 4. Here and further phase trajectories and Poincaré maps are presented for the main body m_1 . Its Fourier spectrum in logarithmic scale is also shown at Fig. 4. We see Poincaré section to be closed curve, and Fourier spectrum has the well-pronounced peaks at two basic frequencies ω and ω_1 and at their combinations, what is typical for quasiperiodic motion.

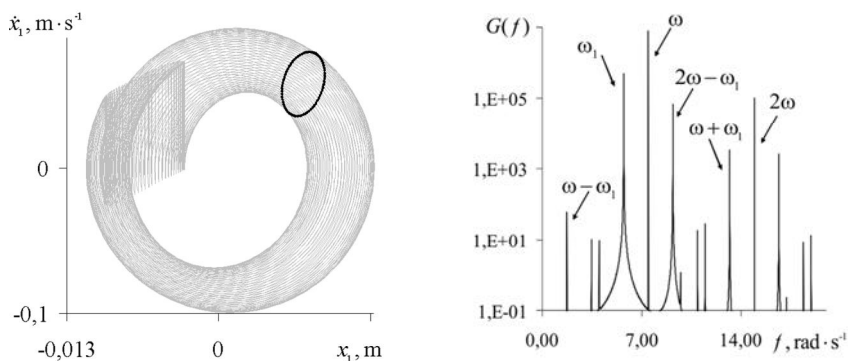


Fig. 4. Poincaré map and Fourier spectrum for quasiperiodic regime

Now we'll look at the system dynamic behaviour between points K ($\omega=7.45 \text{ rad/s}$) and L ($\omega=8.0 \text{ rad/s}$) that is after Neimark-Sacker bifurcations.

3. Vibroimpact system dynamic behaviour after Neimark-Sacker bifurcations

We'll see that soon after these bifurcations the quasiperiodic motion will be destroyed. We'll observe the breakdown of closed curves and of invariant torus which are typical for quasiperiodic motion. We'll see new regimes and their alternation – subharmonic periodic vibrations that is regimes with long period and big impact number per cycle (“chatter”). The appearance of subharmonic periodic vibrations is one characteristic precursor to chaotic motion. And the chaotic motion on strange attractor will not keep it waiting as a matter of fact. One of the signs of impending chaotic behaviour in dynamical system is a series of changes in motion nature as control parameter is varied. We'll see some transitional zones of prechaotic or postchaotic state. What do “transitional zones” mean? We cannot call these regimes both periodic or quasiperiodic and chaotic because their characteristics are contradictory ones. So we call them as transitional zones as Prof. F. Moon writes in his famous textbook [1]. We think maybe we'll be able to “catch” intermittency at some frequency? It is future work. Prof. A.Yu. Shvets (National Technical University of Ukraine "KPI") [6, 25] identifies intermittency with invariant measure helping. We think that it would be nice to fulfill the wavelet analysis of these signals in order to obtain sure quantitative characteristics of intermittency [26, 27].

Now let us have a more detail look at vibroimpact system states which are realizing in this frequency range between Neimark-Sacker bifurcations that is between points K and L . It is known that the sign of largest Lyapunov exponent λ determines sufficiently well the kind of oscillatory motion: the negative sign $\lambda < 0$ corresponds to periodic regimes, the positive sign $\lambda > 0$ – to chaotic ones, and $\lambda \approx 0$ – to quasiperiodic oscillatory regimes. It is known that Lyapunov exponent estimation for non-smooth nonlinear systems has some difficulties because just discontinuity of the right-hand side of motion differential equations. We have written about the largest Lyapunov exponent estimation in non-smooth vibroimpact system in [28]. Now we use the Benettin's algorithm. So far as step Heviside function $H(x_1 - x_2)$ is discontinuous one we must take into attention zero and nonzero for this function under integration both initial equations (1) and equations in variations that are used in Benettin's algorithm. We integrate these equations by the program ode23s (MATLAB® ODE solvers). This program integrates the systems of stiff differential equations.

So the plot of the largest Lyapunov exponent dependence on control parameter shows clearly the whole motion picture at this frequency range (Fig. 5). At this Fig. we see the change of system dynamic states when the control parameter (exciting frequency) is varied. The frequency ranges where the largest Lyapunov exponent is negative ($\lambda < 0$) correspond to periodic regimes, where $\lambda > 0$ – to chaotic ones, and where $\lambda \approx 0$ – to quasiperiodic oscillatory regimes.

Let us now discuss more in details the route to chaos from quasiperiodic regime.

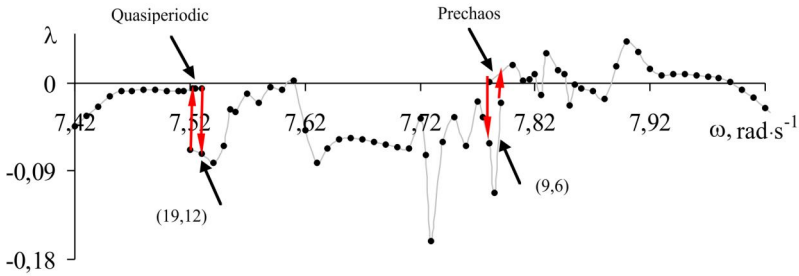


Fig. 5. The largest Lyapunov exponent dependence on control parameter

We observe the hysteresis effect (jump phenomenon)² in very narrow frequency range $7.52 \text{ rad/s} < \omega < 7.53 \text{ rad/s}$, where quasiperiodic and (19,12)-periodic regimes are existing. The arising of one or the other regime depends on history that is on initial conditions. It is the region where both periodic and quasiperiodic motions can exist and the precise motion that will result may be unpredictable.

The (19,12)-periodic regime is existing some more under short frequency varying.

Then we see the short zone of transition from (19,12)-periodic regime to other periodic regimes with long periods and big impact numbers per cycle (“chatter” or “rattle”). Transition is beginning at $\omega = 7.55 \text{ rad/s}$ when thirteenth impact is adding to 12 existing ones. At Fig. 6 we clearly see this thirteenth impact. Then there are regimes with very long periods, the Poincaré maps show big points numbers which after all form almost closed curve under

$7.59 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 7.61 \text{ rad/s}$.

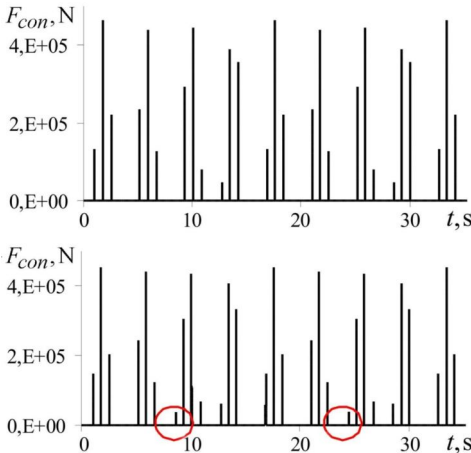


Fig. 6. Contact forces for (19,12)-regime ($\omega = 7.54 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$) and for (19,13)-regime ($\omega = 7.55 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$)

The largest Lyapunov exponent is decreasing tenfold. So this regime looks highly quasiperiodic one if we look at its Poincaré map. But its Fourier spectrum (in logarithmic scale) is board and continuous, such as under chaotic motion (Fig. 7,(d)).

These characteristics contradicts one another, therefore we think that we cannot call this regime both quasiperiodic and chaotic. It is transitional motion. At Fig. 7 we show phase trajectories and Poincaré maps for (19,12)-periodic regime, chatter, and transitional regime.

² We consider hysteresis effect as dependence of the system state on its history (the system manifests hysteretic features in the transition between different types of motion) [1].

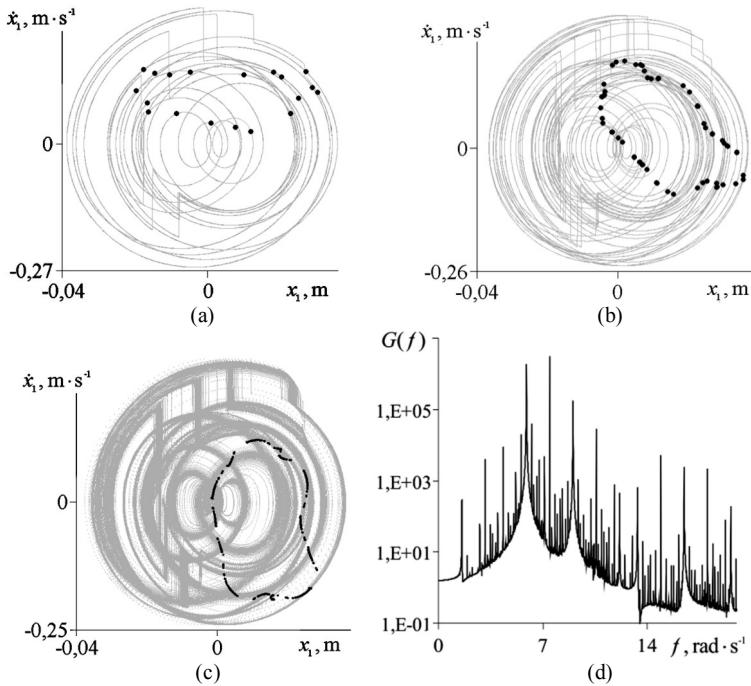


Fig. 7. Phase trajectories and Poincaré maps for: (a) (19,12)-periodic regime $\omega = 7.54$ rad/s , $\lambda = -0.081$; (b) chatter $\omega = 7.58$ rad/s , $\lambda = -0.020$; (c) transitional regime $\omega = 7.61$ rad/s , $\lambda = 0.0027$; (d) Fourier spectrum for transitional regime, $\lambda = 0.0027$

When we are following the Fig. 5 from the left to the right we see the relatively big frequency range where periodic regimes are realizing up to hysteresis phenomenon. There are subharmonics – (14,10) and (23,17)-periodic regimes which sharply replace each other under $\omega = 7.72$ rad/s . Subharmonics play an important role in prechaotic vibrations so far as their appearance in frequency spectrum often is a characteristic precursor to chaotic motion. There may be in fact many patterns of prechaos behaviour.

We again observe the hysteresis effect in very narrow frequency range 7.77 rad/s $\leq \omega \leq 7.79$ rad/s , where transitional (prechaos) and (9,6)-periodic regimes are realising. In this frequency range the Poincaré map for transitional (prechaos) motion is becoming a set of points generally arranged in almost closed curve. It is the breakup of the quasiperiodic torus before the chaotic motion. At very narrow frequency range 7.80 rad/s $\leq \omega \leq 7.815$ rad/s there is a chaotic motion ($\lambda = 0.018$).

After that we see the zone with complicated motion picture under 7.80 rad/s $\leq \omega \leq 7.89$ rad/s . Here chaotic motion alternates with prechaos and postchaos behaviour.

For example at Fig. 8 phase trajectories and Poincaré maps in such states are depicted.

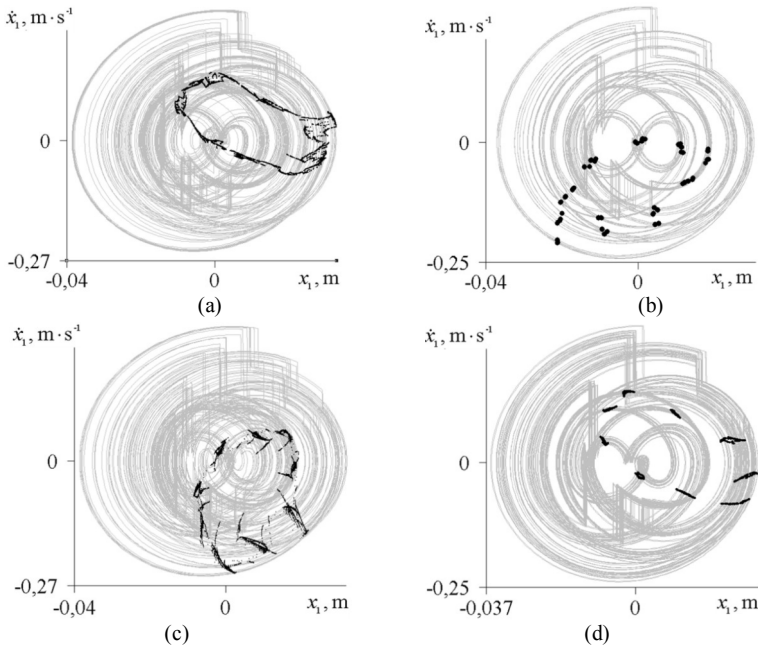
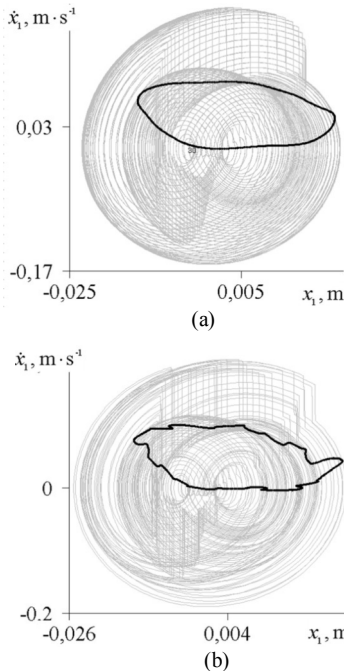


Fig. 8. Phase trajectories and Poincaré map for: (a) $\omega = 7.80$ rad/s , $\lambda = 0.018$; (b) $\omega = 7.82$ rad/s , $\lambda = 0.0092$; (c) $\omega = 7.83$ rad/s , $\lambda = 0.031$; (d) $\omega = 7.845$ rad/s , $\lambda = 0.0086$



Eventually there is really chaotic motion in narrow frequency range $7.90 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 7.92 \text{ rad/s}$. At first we see how Poincaré map for quasiperiodic motion is deforming under $\omega = 7.93 \text{ rad/s}$ (Fig. 9) when frequency is decreasing. Chaotic motion is characterized by the breakup of the quasiperiodic torus structure as the control parameter is decreasing.

Fig. 9. Phase trajectories and Poincaré map for: (a) $\omega = 7.94$ rad/s , $\lambda = 0.0086$; (b) $\omega = 7.93$ rad/s , $\lambda = 0.0069$; (c) $\omega = 7.92$ rad/s , $\lambda = 0.014$

Let us have a look at chaotic motion under $\omega = 7.92 \text{ rad/s}$, $\lambda = 0.014$. At Fig. 11 Poincaré map for main body m_1 and Fourier spectrum in logarithmic scale are depicted. Poincaré map does not consist of either a finite set of points or a closed orbit. Prof. F. Moon [1] have called his Poincaré map “Fleur de Poincaré” (Fig. 10). There is not the word “fleur” in English. There is word “Fleur-de-lis” which means “ірис” in Ukrainian. His Poincaré map is similar at fleur-de-lis. Prefix “de” is used in French, Poincaré was Frenchman. Therefore we call our beautiful map as “Leaflet de Poincaré” (“пелюстка” in Ukrainian).

At Fig. 11 we see a broad continuous spectrum of Fourier components what is typical for chaotic motion. The generation of a continuous spectrum of frequencies is one of the characteristics of chaotic vibrations.

Our vibroimpact system is the damped one. Poincaré map is the singular characteristic of chaotic vibrations in such system. The Poincaré map appears as an infinite set of highly organized points arranged similar to parallel lines. Chaotic motion is not a formless chaos but one in which there is some order that is fractal structure.

We enlarge a portion of the Poincaré map and observe further structure. We see that this structured set of points continues to exist after three enlargements (Fig. 12). So the motion appears to occur on the strange attractor. This embedding of structure within structure is a strong indicator of chaotic motion. It is similar to Cantor set.

We observe the fractal structure of Poincaré map depicted at Fig. 11, at least this structure looks highly fractal. We have been able to obtain it when we have had 207000 Poincaré points on the map. It is shown at Fig. 12. We think that just this fractal structure implies the existence of a strange attractor.

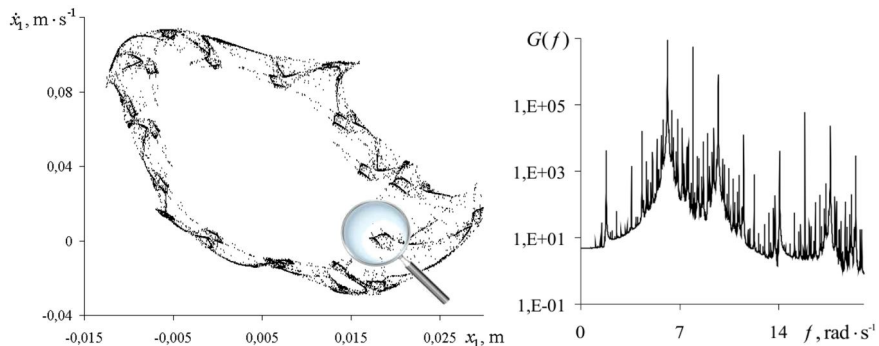


Fig. 11. Poincaré map (“Leaflet de Poincaré”) and Fourier spectrum for $\omega = 7.92 \text{ rad/s}$, $\lambda = 0.014$

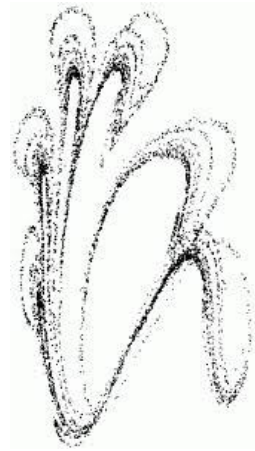


Fig. 10 Poincaré map – Fleur de Poincaré [1]

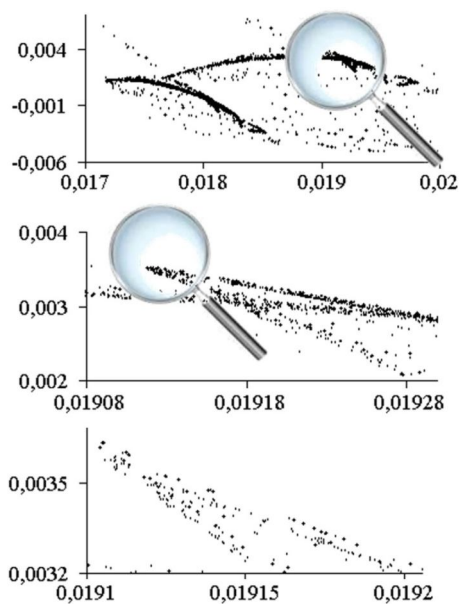


Fig. 12. Fractal structure for Poincaré map from Fig. 11

Thus Poincaré map, Fourier spectrum, the largest positive Lyapunov exponent, and fractal structure of Poincaré map confirm the chaoticity of this regime.

So we see three very short frequency ranges where chaotic motions are

realizing:

$$7.80 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 7.815 \text{ rad/s},$$

$$\omega = 7.83 \text{ rad/s},$$

$$7.90 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 7.92 \text{ rad/s}.$$

We think these chaotic motions may be considered as transient chaos because chaotic vibrations appear for some parameter changes and then degenerate into a quasiperiodic motion after a short time [1, 29, 30].

4. Conclusions

Quasiperiodic route to chaos

in vibroimpact system have been studied under changing of external frequency.

1. At this sufficiently complicated route different oscillatory regimes have succeeded each other many times under very small control parameter varying in narrow frequency range. There were periodic subharmonic regimes – chatters, quasiperiodic, and chaotic regimes. There were the zones of transition from one regime to another, the zones of prechaotic or postchaotic motion. The hysteresis effects (jump phenomena) have been observed at two frequency ranges.

2. The chaoticity of obtained regime has been confirmed by typical views of Poincaré map and Fourier spectrum, by the positive value of the largest Lyapunov exponent, and by the fractal structure of Poincaré map.

3. Our picture of quasiperiodic route to chaos confirm the theory by Newhouse, Ruelle, and Takens who suggested a new bifurcation scenario where a periodic solution produces subsequently a torus and then a strange attractor.

REFERENCES

1. Moon F.C. Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers. – New York: Wiley, 1987. – C. 219.
2. Thompson J.M.T., Thompson M., Stewart H.B. Nonlinear dynamics and chaos. – John Wiley & Sons, 2002.
3. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos //Moscow: Fizmatlit.-2006.-356P. – 2001.
4. Schuster H.G. Deterministic Chaos. An Introduction 2nd Revised Edition. – 1988.
5. Luo A.C.J. Analytical routes to chaos in nonlinear engineering. – John Wiley & Sons, 2014.
6. Shvets A.Yu. Deterministic chaos. Textbook, Kyiv, NTUU "KPI", 2010. <http://chaos.kpi.ua/images/stories/Posibnik-nor.pdf> (in Ukrainian)
7. Volchenkov D., Leoncini X. (ed.). Regularity and Stochasticity of Nonlinear Dynamical Systems. – Springer International Publishing, 2018.

8. *Volchenkov, D.*, "Survival under Uncertainty An Introduction to Probability Models of Social Structure and Evolution", Springer Series: Understanding Complex Systems, 240 pages, eBook ISBN 978-3-319-39421-3, ISBN 978-3-319-39419-0, Berlin / Heidelberg © 2016. <http://www.springer.com/gp/book/9783319394190>
9. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1983. – Т. 7. – №. 1-3. – С. 181-200.
10. *Leine R.I., Van Campen D.H., Van de Vrande B.L.* Bifurcations in nonlinear discontinuous systems //Nonlinear dynamics. – 2000. – Т. 23. – №. 2. – С. 105-164.
11. *Kowalczyk P.* et al. Two-parameter discontinuity-induced bifurcations of limit cycles: Classification and open problems //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2006. – Т. 16. – №. 03. – С. 601-629.
12. *Manneville P., Pomeau Y.* Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1980. – Т. 1. – №. 2. – С. 219-226.
13. *Afraimovich V.S., Shilnikov L.P.* Invariant two-dimensional tori, their breakdown and stochasticity //Amer. Math. Soc. Transl. – 1991. – Т. 149. – №. 2. – С. 201-212.
14. *Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D.* On Some Mathematical Topics in Classical Synchronization: a Tutorial //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2004. – Т. 14. – №. 07. – С. 2143-2160.
15. *Bakri T.* Torus Breakdown and Chaos in a System of Coupled Oscillators //International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2005.
16. *Verhulst F.* Torus break-down and bifurcations in coupled oscillators //Procedia IUTAM. – 2016. – Т. 19. – С. 5-10.
17. *Komuro M.* et al. Quasi-periodic bifurcations of higher-dimensional tori //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2016. – Т. 26. – №. 07. – С. 1630016.
18. *Müller P. C.* Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities //Chaos, Solitons & Fractals. – 1995. – Т. 5. – №. 9. – С. 1671-1681.
19. *Stefanski A., Dabrowski A., Kapitaniak T.* Evaluation of the largest Lyapunov exponent in dynamical systems with time delay //Chaos, Solitons & Fractals. – 2005. – Т. 23. – №. 5. – С. 1651-1659.
20. *Andreaus U., Placidi L., Rega G.* Numerical simulation of the soft contact dynamics of an impacting bilinear oscillator //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2010. – Т. 15. – №. 9. – С. 2603-2616.
21. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Stability and Discontinuous Bifurcations in Vibroimpact System: Numerical investigations. LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH and Co. KG Dudweiler, Germany. 2017.
22. *Bazhenov V.A.* et al. Stability and bifurcations analysis for 2-DOF vibroimpact system by parameter continuation method. Part I: loading curve //Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2015. – Т. 4. – №. 4. – С. 357-370.
23. *Bazhenov V.A.* et al. Numerical Bifurcation Analysis of Discontinuous 2-DOF Vibroimpact System. Part 2: Frequency-Amplitude response //Journal of Applied Nonlinear Dynamics.– 2016. – 2016.
24. *Lamarque C.H., Janin O.* Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal superposition //Journal of Sound and Vibration. – 2000. – Т. 235. – С. 567-609.
25. *Shvets A.Y., Sirenko V.O.* Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems //Chaotic Modeling and Simulation.—2012.—2.—P. – 2012. – С. 303-310.
26. *Murguía J.S.* et al. Wavelet characterization of hyper-chaotic time series //Revista Mexicana de Física. – 2018. – Т. 64. – №. 3. – С. 283-290.
27. *Rubežić V., Djurović L., Sejdić E.* Average wavelet coefficient-based detection of chaos in oscillatory circuits //COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering. – 2017. – Т. 36. – №. 1. – С. 188-201.
28. *Bazhenov, V.A., Pogorelova, O.S., & Postnikova, T.G.* Lyapunov exponents estimation for strongly nonlinear nonsmooth discontinuous vibroimpact system. Strength of Materials and Theory of Structures, 2018, 99. (in press).
29. *Lai Y.C., Tél T.* Transient chaos: complex dynamics on finite time scales. – Springer Science & Business Media, 2011. – Т. 173.
30. *Afraimovich V.S., Neiman A.B.* Weak transient chaos //Advances in Dynamics, Patterns, Cognition. – Springer, Cham, 2017. – С. 3-12.

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.

РУЙНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРУ У ВІБРОУДАРНІЙ СИСТЕМІ - ШЛЯХ ДО КРИЗИ?

Хаотичні коливання динамічних систем і сценарії їхнього переходу до хаосу – одне з найбільш цікавих і досліджуваних питань в нелінійній динаміці. Зокрема, сценарії переходу до хаосу в негладких динамічних системах представляють особливий інтерес. У цій статті ми вивчаємо квазіперіодичний шлях до хаосу нелінійної негладкої розривної віброударної системи з двома ступнями вільності. Руйнування інваріантного тора, або замкнутої кривої, має місце саме при квазіперіодичному переході до хаосу. Це дорога до кризи? У вузькому діапазоні частот різні коливальні режими багаторазово змінювали один одного при дуже малій зміні ведучого параметра. Це були періодичні субгармонічні режими (стук), квазіперіодичні та хаотичні режими, зони передхаотичного та післяхаотичного руху. Ефекти гістерезису (явища перекидання) виникали при збільшенні і зменшенні частоти. Спостережуваний хаос був перехідним. Хаотичність отриманого режиму підтверджувалася типовим видом відображення Пуанкаре і Фур'є спектру, позитивним значенням старшого показника Ляпунова та фрактальною структурою відображення Пуанкаре. Ці дослідження підтверджують теорію Ньюхауза, Рюеля і Такенса, які запропонували новий бифуркаційний сценарій, коли періодичне рішення народжує тор, а потім дивний аттрактор.

Ключові слова: віброударна система, динамічна поведінка, квазіперіодичні, хаотичні, субгармоніки, відображення Пуанкаре, спектр Фур'є, показник Ляпунова, фрактальна структура.

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.

РАЗРУШЕНИЕ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА В ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЕ – ПУТЬ К КРИЗИСУ?

Хаотические колебания динамических систем и сценарии их перехода к хаосу – один из наиболее интересных и исследуемых вопросов в нелинейной динамике. В частности, сценарии перехода к хаосу в негладких динамических системах представляют собой особый интерес. В этой статье мы изучаем квазіперіодический путь к хаосу нелинейной негладкой разрывной виброударной системы с двумя степенями свободы. Разрушение инвариантного тора, или замкнутой кривой имеет место именно при квазіперіодическом переходе к хаосу. Это дорога к кризису? В узком диапазоне частот различные колебательные режимы многократно сменяли друг друга при очень малом изменении управляющего параметра. Это были периодические субгармонические режимы (стук), квазіперіодические и хаотические режимы, зоны предхаотического и послехаотического движения. Эффекты гистерезиса (явления переброса) возникали при увеличении и уменьшении частоты. Наблюдаемый хаос был переходным. Хаотичность полученного режима подтверждалась типичным видом отображения Пуанкаре и Фурье спектра, положительным значением старшего показателя Ляпунова и фрактальной структурой отображения Пуанкаре. Эти исследования подтверждают теорию Ньюхауза, Рюеля и Такенса, которые предложили новый бифуркационный сценарий, когда периодическое решение рождает тор, а затем странный аттрактор.

Ключевые слова: виброударная система, динамическое поведение, квазіперіодические, хаотические, субгармоніки, отображение Пуанкаре, спектр Фурье, показатель Ляпунова, фрактальная структура.

UDC 539.3

Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G. Invariant torus break-down in vibroimpact system – route to crisis? // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 3-17.

Quasiperiodic route to chaos in nonlinear non-smooth discontinuous 2-DOF vibroimpact system is studied.

Fig. 12. Ref. 30

УДК 539.3

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Руйнування інваріантного тору у віброударній системі - шлях до кризи? // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 3-17.

Вивчається квазіперіодичний шлях до хаосу нелінійної негладкої розривної віброударної системи з двома ступнями вільності.

Лл. 12. Бібліог. 30 назв.

УДК 539.3

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Рразрушение инвариантного тора в виброударной системе – путь к кризису? // Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. - Вып. 100. - С. 3-17.

Изучается квазипериодический путь к хаосу нелинейной негладкой разрывной виброударной системы с двумя степенями свободы.

Ил. 12. Библиог. 30 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, директор НДІ будівельної механіки **БАЖЕНОВ Віктор Андрійович**

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу**

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29;**Мобільний тел.:** +38(067) 111-22-33;**E-mail:** vikabazh@ukr.net**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-5802-9848>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки **ПОГОРЕЛОВА Ольга Семенівна**

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **ПОГОРЕЛОВІЙ Ользі Семенівні.**

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29**Мобільний тел.:** +38(067) 606-03-00**E-mail:** pogos13@ukr.net**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-5522-3995>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки **ПОСТНІКОВА Тетяна Георгіївна**

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **ПОСТНІКОВІЙ Тетяні Георгіївні.**

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29**Мобільний тел.:** +38(050) 353-47-19**E-mail:** posttan@ukr.net**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-6677-4127>

UDC 539.3

NONLINEAR FEM ANALYSIS OF CEMENT COLUMN CONFIGURATION IN THE FOUNDATION IMPROVED BY DEEP MIXING METHOD

Nguyen Ngoc Thang¹, PhD

Lecturer, Faculty of Civil Engineering

Nguyen Anh Tuan², PhD

Lecturer, Faculty of Transportation Engineering

¹*Tien Giang University, Vietnam*

²*Hochiminh City University of Transport, Vietnam*

Abstract. In this study, the stress distribution and the deformation in the foundation improved by Deep Mixing Method are analyzed using nonlinear FEM in which the stress-strain relation is elasto-plastic to apply to more detailed specification of the configuration of cement column.

Keywords: Deep Mixing Method, soft soil, cement column, FEM, Simplified Method.

1. Introduction

Main objective of research work is to define a proper design method of DCM column to overcome the limitation of the method, especially for the soft soil such as Mekong Delta soil. There are several methods for designing the DCM column for the soft soil as discussed in the references (Bengt B. Broms, 1999), (EuroSoilStab, 2002) and (Coastal Development Institute of Technology, 2002). In these methods, the settlement of the soil layer is calculated by the consolidation index and the bearing capacity is checked by the strength of the cement column and the bearing capacity of the soil. However, the method to define the cement column properly is not specified.

In this study, the method to define the configuration of cement column, i.e. the dimension and spacing of the cement columns within the soil layers, is proposed. A nonlinear Finite Element Method (FEM), as programmed as commercial ABAQUS software, is used for the detailed consideration. By this nonlinear FEM, the responses and behaviors of the cement column during the stabilizing of soft soil are clearly shown through the distribution of the stress both in the cement column and in the soft soil layers. By this method, the history of settlement for the embankment construction can be displayed.

2. Analysis for embankment

2.1. Model of an embankment

The model to be analyzed is shown in Fig. 1. The model consists of three soil layers, i.e. 11 m soft soil layer, 4 m silty clay and 5 m silty sand, respectively. A 5 m high embankment structure is constructed on soft soil layers. The embankment is planned to pass a transportation highway. Since the model is analyzed in two dimensional, only cross section of the model is given in Fig. 1.

The soft soil layer is one of the typical soft soil layers in the Mekong Delta. The properties of soil are obtained by the tests of the Mekong Delta soils (Engineering Geological Report, 2000) while the dilatancy angle is referred in the literatures (Bengt B. Broms, 1999), (EuroSoilStab, 2002) and (CDIT, 2002).

The traffic load on the embankment is 20 kN/m^2 that is recommended by Vietnamese Standard for Transportation Road Construction (TCVN) (Vietnamese Standards, 2000).

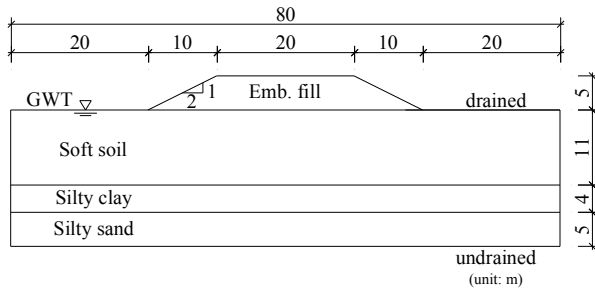


Fig. 1. Cross section of the embankment model

Table 1

Material properties

Parameter	Soft soil	Silty clay	Silty sand	Emb.	DCM
Saturated unit weight, γ_{sat} , kN/m^3	14.370	18.880	18.510	20.000	15.810
Young modulus, E , MPa	3.048	6.028	7.434	20.000	43.750
Poisson's ratio, ν	0.485	0.439	0.356	0.333	0.333
Cohesion, c , MPa	0.0071	0.0131	0.0024	0.0100	0.1750
Frictional angle, ϕ ($^\circ$)	3.25	12.50	26.50	30.00	30.00
Dilatancy angle, ψ ($^\circ$)	1.625	6.25	13.25	15.00	15.00
Permeability, k , cm/s	10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-7}
Void ratio, e_0	2.389	0.705	0.604	1.500	1.532

2.2. Simplified Method

A configuration of cement column generally depends on several factors such as allowable settlement, soil capacity require preventing failure of civil structures such as embankment and dimension of the cement column. The application of the cement column for stabilizing the soft soil is reported in references (Bengt B. Broms, 1999), (EuroSoilStab, 2002) and CDIT, 2002).

The simple method is one of limit equilibrium method where the applied load must equal to resistant of the cement column and soil layer beneath the civil structure, such as embankment. The resistance of the cement column which is analyzed by Terzaghi's equation and settlement is evaluated by using the consolidation theory.

To obtain an optimum configuration, a series of calculation for the settlement of the embankment and the bearing capacity of the improved soil layers are performed by varying size of diameter, spacing and length of the cement column. The optimum configuration is determined by using the smallest replacement area of the cement column in a square meter of the stabilization area and the allowable settlement.

2.3. Nonlinear FEM

The optimum configuration found by the Simplified Method, mentioned above, is investigated by using the nonlinear FEM. For Model-A in Fig. 2, the soft soil layers are not stabilized. The foundation of the embankment is improved by using the cement column for Model-B in Fig. 3.

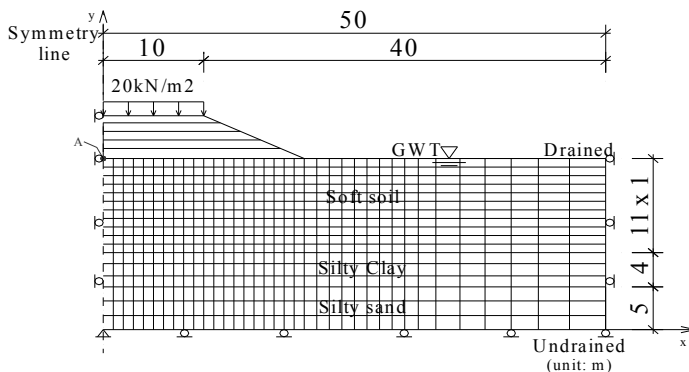


Fig. 2. Embankment without stabilization (Model-A)

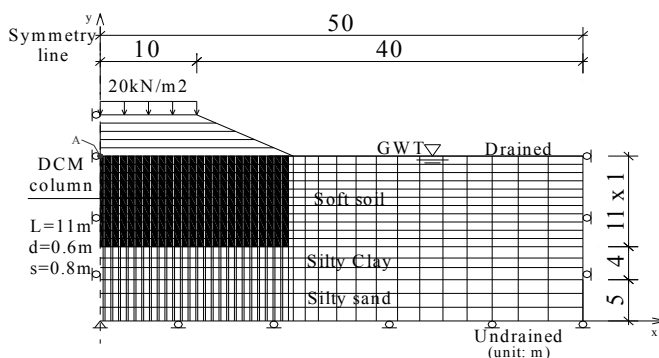


Fig. 3. Embankment with stabilization (Model-B)

ABAQUS program is used to numerically analyze the problem. In the numerical analysis, the cement columns, the soil layers and the embankment are modeled as nonlinearly elasto-plastic materials with Mohr-Coulomb failure criteria. The two-dimensional (2D) numerical model is used for this study. Due to the symmetry of the problem, there is a half of the section modeled to save the computing time. In order to explain more realistic behaviors of soft soil, two phases coupling of solid and pore water and nonlinear of solid materials are taking into account in FEM analysis. The nonlinearity of the material is expressed by Mohr-Coulomb yield criterion.

A finite element mesh is constructed to simulate the sequential construction procedure of the embankment and to calculate the resulting consolidation settlements in the soft soil layer. The mesh includes a half of the geometry because of symmetry. The mesh consists of the part the soft soil layer, silty clay layer, silty sand layer and the five embankment layers. The Model-A consists of 746 elements and 807 nodes, while the Model-B consists of 4828 elements and 6569 nodes. In the Model-B, the 0.6 m diameter of cement column with 0.8 m spacing center to center of cement columns are embedded in the 11 m depth beneath the embankment structure. Since the stabilization problems considering in this study require the information of both soil skeleton and pore water inside the soil mass. The elements are pore water/ stress four node quadrilateral elements (with bilinear displacement and bilinear pore pressure) and appropriate for finite strain analysis.

The cement column in FEM is assumed the continuum element, which the elements can be used to model the widest variety of components. Conceptually, the continuum elements simply model small blocks of material in a component. Since they may be connected to other elements on any of their faces, the continuum elements, like bricks in a building or tiles in a mosaic, can be used to build models of nearly any shape, subjected to nearly any loading.

In both of models, step by step embankment construction is simulated by applied analysis featuring of ABAQUS software, i.e. activate and deactivate mesh of embankment structure in plane stress assumption. The embankment structure is built in 1 m layer by layer construction; totally 5m high of embankment on soft soil layer. The nodes on the mirror symmetrical line are restrained as symmetrical boundary condition, while the nodes on the other sides, are not allowable to move laterally the ground surface which is considered as drained by applied zero pore water pressure during the analysis.

Each step of embankment construction is assumed 2 days. Totally, 10 days for completing the embankment are considered before loaded by external load such as traffic load. In this analysis, 20 kN/m² traffic loads are subjected to the surface of embankment as suggested by Vietnamese standard. The models are analyzed for 1000 days after the construction of the embankment to obtain final settlement.

During the analysis, the nonlinear effect of the soil layers is taken into account. For this nonlinear analysis, a Mohr - Coulomb constitutive model is used with a simple bilinear hardening rule. This nonlinear effect is only used for the soil skeleton in the soil mass, while the pore water remains in linear and follows the equilibrium condition with respect to coupling with the soil skeleton.

3. Results of Analysis

The cement column in which the diameter is 0.6m, the spacing is 0.8m and the length is 11m was obtained as an optimum configuration by the Simplified Method. By the optimum configuration 44.2% of replacement area by cement column and 0.169 m of maximum settlement beneath the embankment structure are obtained. The configuration of cement column reduces almost 93% of settlement of the soft soil layers. The flow-chart for the proposed Simplified Method is shown in Fig. 4.

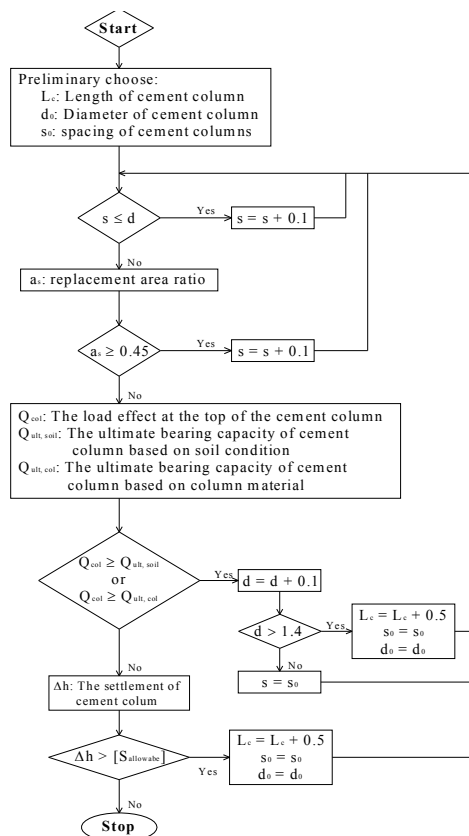


Fig. 4. Flow-chart for the Simplified Method

Fig. 5 and Fig. 6 show the distribution of the settlement of soft soil beneath of the embankment for Model-A and Model-B after 1000 days consolidation analysis, respectively.

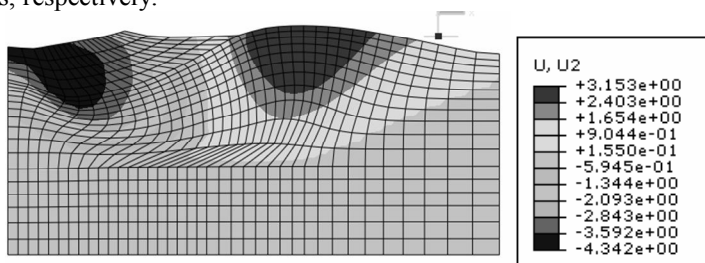


Fig. 5. Settlement distribution of Model-A

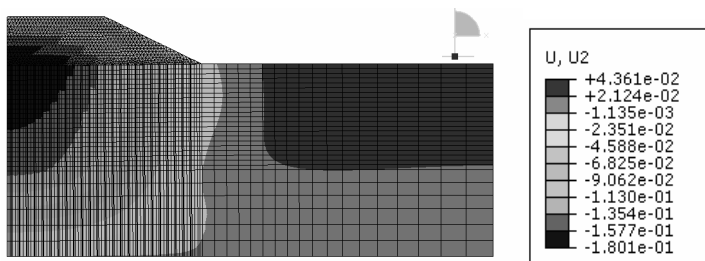


Fig. 6. Settlement distribution of Model-B

The settlement history plotted in Fig. 7 shows the capability of nonlinear FEM for evaluating the settlement of the embankment both with and without stabilization using cement column. These results confirmed with the calculation results using the Simplified Method explained above.

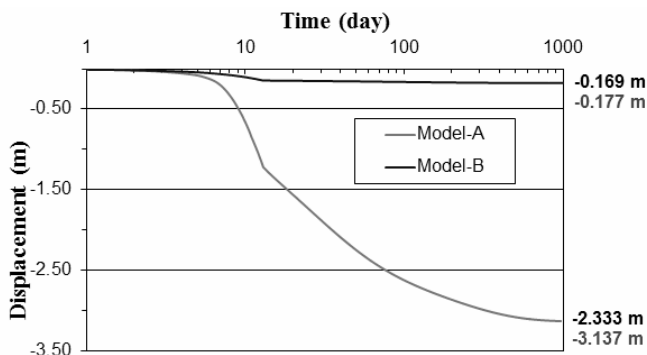


Fig. 7. Comparison of the settlement histories

The distribution of vertical effective stresses of each cement column is plotted in Fig. 8. The stress distributions are divided into three regions, namely region I, II, and III. The region-I indicates the soil mass can bear the applied load. The cement column may not be required in this region. In contrast in the region-III, all applied load are supported by the cement column. The region-II

shows that both of soil and cement column bear the applied load. By removing the portion supported by soils, plotted in the region-II, we may reduce the length of cement column proportionally to the removed portion.

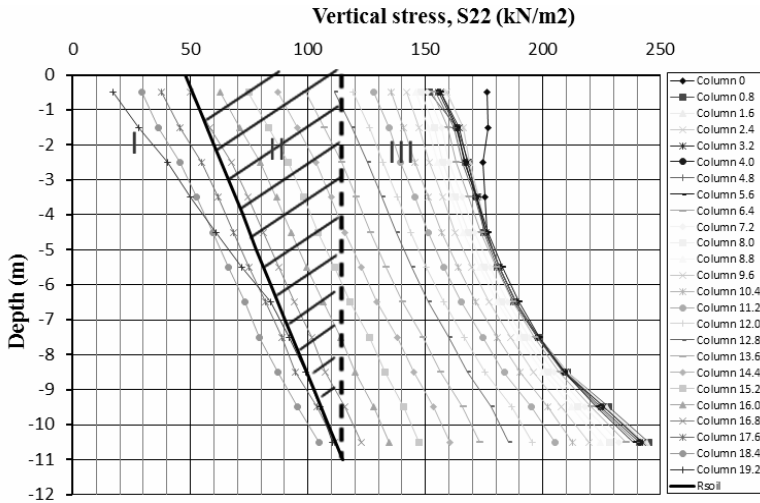


Fig. 8. Response of the cement column

The last FEM model as shown in Fig. 9, Model-C, is analyzed by the load used in the previous models and the result of settlement distribution as shown in Fig. 10. Comparing the maximum settlement occurs on the Model-B and Model-C, as plotted in Fig. 11, the configuration of Model-C is concluded as the optimum configuration for the case in this study.

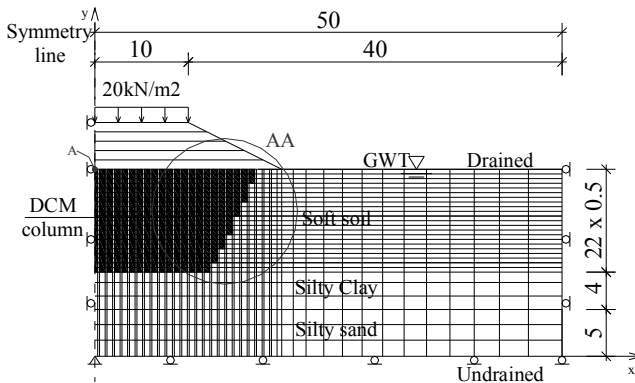


Fig. 9. FEM Model of reduced cement column length (Model-C)

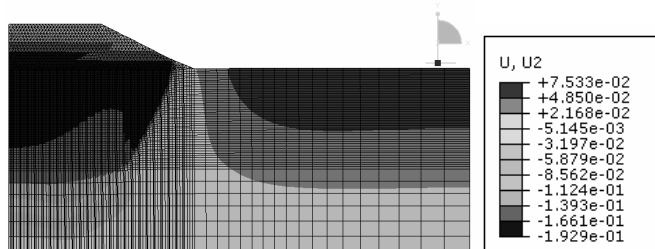


Fig. 10. Settlement distribution of Model-C

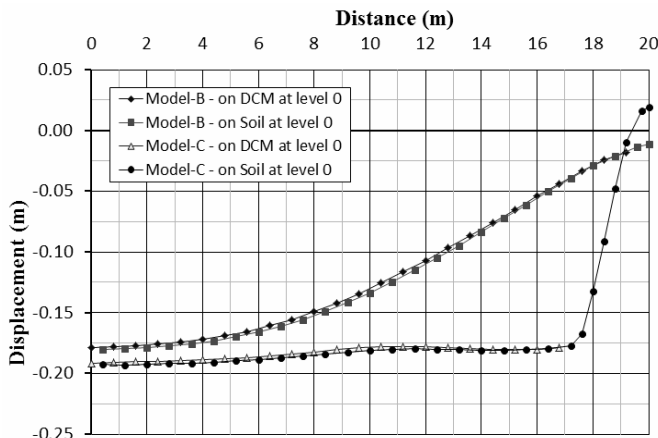


Fig. 11. Comparison of maximum settlement beneath of the embankment structure

4. Conclusions

Based on the analytical study described above, the conclusions of this study are listed as follow:

The optimum configuration of the cement column to stabilize an embankment is determined by the Simplified Method in which the settlement and bearing capacity are estimated by the formula used in the current design. The flow-chart of the method is shown in Fig. 4.

By FEM analysis for Deep Mixing Method using cement column, the stress distribution and the differential settlement are estimated. By the result of the analysis, more detailed configurations of cement column are suggested.

Comparing the results of the Simplified Method and FEM analysis, it is suggested that the stress distribution and the deformation in the foundation improved by Deep Mixing Method are important to determine the optimum configuration of cement column.

REFERENCES

1. Bengt B. Broms (1999), Dry Mix Method for Deep Soil Stabilization.
2. Coastal Development Institute of Technology (2002), The Deep Mixing Method: Principle, Design and Construction, A.A. Balkema: The Netherlands.
3. Engineering Geological Report (2000), Project: Tan Huong Industrial Zone - Vietnam.

4. EuroSoilStab (2002), Development of design and construction methods to stabilize soft organic soils, CT97-0351 Project No. BE 96-3177.
5. Guide book: ABAQUS, Getting Started with Abaqus, Version 6.8.2
6. Karl Tezghi, Ralph B. Peck, Soil Mechanics in Engineering Practice, 3rd Edition.
7. Vietnamese Standards: TCVN 22TCN 262-2000 (2000), Process survey, design road embankment on soft soil.

Стаття надійшла 20.04.2018

Nguyen Ngoc Thang, Nguyen Anh Tuan

NONLINEAR FEM ANALYSIS OF CEMENT COLUMN CONFIGURATION IN THE FOUNDATION IMPROVED BY DEEP MIXING METHOD

The soil stabilization method, called Deep Mixing Method, is often applied for the soft soil layers in the alluvial plain, such as the Mekong Delta. In this study, the configuration of the cement column for Deep Mixing Method, which is embedded in the soft soil layers, is investigated for the different sizes of diameter, spacing and length of cement column. To obtain the optimum configuration of the cement column, the settlement of the structure and volume of cement are compared. In this study, a new method to find out the optimum configuration using the formula in the current design is proposed as the Simplified Method. The stress distribution and the deformation in the foundation improved by Deep Mixing Method are analyzed by using nonlinear FEM in which the stress-strain relation is elasto-plastic. The stress distribution in cement column and the differential settlement obtained by the FEM analysis are applied to more detailed specifications of the configuration of cement column.

Keywords: Deep Mixing Method, soft soil, cement column, FEM, Simplified Method.

Нгуєн Нгок Тханг, Нгуєн Анх Туан

НЕЛІНІЙНИЙ МСЕ АНАЛІЗ КОНФІГУРАЦІЇ ЦЕМЕНТНОЇ КОЛОНИ В ПІДФУНДАМЕНТНІЙ ОСНОВІ, ПОЛІПШЕНОЇ МЕТОДОМ ПОГЛИБЛЕНОГО ЗМІШУВАННЯ

Метод стабілізації ґрунту, званий методом глибокого змішування, часто застосовується для м'яких шарів ґрунту в долинах з алювіальними ґрунтами, таких як дельта річки Меконг. У даній роботі досліджена конфігурація бетонної колони, що вбудовується в м'які шари ґрунтової основи, поліпшеної методом глибокого перемішування, для різних розмірів діаметрів, довжин колон і відстаней між ними. Для отримання оптимальної конфігурації колони проводиться порівняння витрат бетону. У цьому дослідженні в якості спрощеного методу пропонується новий метод визначення оптимальної конфігурації з використанням отриманих співвідношень. Розподіл напружень і деформацій основи аналізуються з використанням нелінійного МСЕ, в якому залежність напруження-деформація відповідає пружнопластичній моделі. Розподіл напружень, отриманий за допомогою МСЕ, застосовується для уточнення конфігурації колони.

Ключові слова: метод глибокого змішування, м'який ґрунт, цементна колона, МСЕ, спрощений метод.

Нгуєн Нгок Тханг, Нгуєн Анх Туан

НЕЛІНІЙНИЙ МКЭ АНАЛІЗ КОНФІГУРАЦІЇ ЦЕМЕНТНОЇ КОЛОННИ В ПІДФУНДАМЕНТНОМУ ОСНОВАННІ, УЛЮЧШЕНОМУ МЕТОДОМ ГЛУБОКОГО СМЕШИВАННЯ

Метод стабилизации ґрунта, называемый методом глубокого смешивания, часто применяется для мягких слоев почвы в равнинах с алювиальными ґрунтами, таких как дельта реки Меконга. В данной работе исследована конфигурация бетонной колонны, встраиваемой в мягкие слои ґрунтового основания, улучшенного методом глубокого смешивания, для различных размеров диаметров, длин колонн и расстояний между ними. Для получения оптимальной конфигурации колонны проводится сравнение расхода бетона. В этом исследовании в качестве упрощенного метода предлагается новый метод определения оптимальной конфигурации с использованием полученных соотношений. Распределение напряжений и деформации основания анализируются с использованием нелинейного МКЭ, в котором зависимость напряжение-деформация соответствует упругопластической модели. Распределение напряжений, полученное с помощью МКЭ, применяются для уточнения конфигурации колонны.

Ключевые слова: метод глубокого смешивания, мягкая почва, цементная колонна, МКЭ, упрощенный метод.

УДК 539.3

Nguyen Ngoc Thang, Nguyen Anh Tuan. Нелінійний МСЕ аналіз конфігурації бетонної колони в підфундаментній основі, поліпшеній методом поглибленого перемішування / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 18-26. – Англ.

Досліджено конфігурацію бетонної колони, яка вбудовується в м'які шари ґрунтової основи, поліпшеній методом глибокого перемішування, для різних діаметрів, довжин колон і відстаней між ними.

Табл. 1. Іл. 11. Бібліогр. 7 назв.

UDC 539.3

Nguyen Ngoc Thang, Nguyen Anh Tuan. Nonlinear fem analysis of cement column configuration in the foundation improved by deep mixing method / Strength of materials and theory of structures: Sci.&Tech. Collected Artcl. – К.: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 18-26.

The configuration of a concrete column has been studied, which is built into soft layers of the ground base, improved by deep mixing, for different diameters, lengths of columns and distances between them.

Tabl. 1. Fig. 11. Ref. 7.

УДК 539.3

Nguyen Ngoc Thang, Nguyen Anh Tuan. Нелинейный МКЭ анализ конфигурации бетонной колонны в подфундаментном основании, улучшенном методом углубленного перемешивания // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА., 2018. – Вып. 100. – С. 18-26. – Англ.

Исследована конфигурация бетонной колонны, которая встраивается в мягкие слои грунтового основания, улучшенного методом глубокого перемешивания, для различных диаметров, длин колонн и расстояний между ними.

Табл. 1. Ил. 11. Библиогр. 7 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):

Nguyen Ngoc Than, PhD, Lecturer, Faculty of Civil Engineering, Tien Giang University.

Adr.: No. 119, Ap Bac St., My Tho City, Tien Giang Province, Vietnam.

Phone: (+84) 908.348.763.

Email: thangxdtg@yahoo.com.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):

Nguyen Anh Tuan, PhD, Lecturer, Faculty of Transportation Engineering, Hochiminh City University of Transport.

Adr.: No. 2, D3 St., Ward 25, Binh Thanh Dist., Hochiminh City, Vietnam.

Phone: (+84) 917.863.898.

Email: tuankct@hcmutrans.edu.vn

UDC 539.3

DEFINITION OF THE FAILURE REGION OF THE OIL TANK WITH WALL IMPERFECTIONS IN COMBINED LOADING

V.A. Bazhenov,
DScTech

O.O. Lukianchenko,
PhD

O.V. Kostina,
PhD

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Povitroflotsky ave., 31, Kyiv, 03680*

Abstract. The stability of an oil reservoir with real imperfections of a wall under the joint action of axial compression and surface pressure is studied using a program complex of finite element analysis. To determine the permissible range of fail-safe operation of the reservoir, irregular imperfections of the middle wall surface are simulated as ratios of the buckling forms with different maximum amplitudes obtained in solving the problem of loss of stability by the Lanczos method. The stability of the shell with real and simulated imperfections of the wall is investigated using the nonlinear static problem by the Newton-Raphson method. Critical ratios of axial compression and surface pressure are determined to ensure overall stability of the reservoir wall. The region of failure on the stability of the oil reservoir with real imperfections is obtained.

Keywords: cylindrical shell, imperfection of shape, stability, combined loading, failure region.

To fully describe the general laws of the stress-strain state of shells with parameters that depend on many factors, the apparatus of linear differential equations turns out to be insufficient, because the most interesting and characteristic features of nonlinear systems do not fit into its framework. They include not only a quantitative change in the parameters of the system in space, related to the magnitude of the initial imperfections and the way the load is applied, but also the qualitative changes that lead to the emergence of critical states, the branching of new solutions and the loss of stable equilibrium.

Mathematical methods that make it possible to investigate nonlinear differential equations are too complicated and laborious to study complex nonlinear systems with multivariant parameters. In those cases when the properties of the shell and the loads acting on it depend on several factors, the shell can have a large number of critical states, the dimension of which is one less than the number of independently varying variables. The problem of constructing such a variety in the general case is extremely complicated, therefore, in the theory of differential equations it is often replaced by the problem of finding only a limited amount of qualitative information concerning the analysis of the quantitative change in the properties of a system when its parameters are varied. The problems of non-linear stability of deformable systems in a number of cases have features that are sensitive to irregularities in shape [2, 6], uneven of the load application, shortcomings in manufacturing technology, and heterogeneity in the physical characteristics of materials.

The presence of small imperfections in the shape of the shell can significantly reduce its critical load. This feature is of great practical importance and therefore

this work is aimed at investigating the influence of initial deflections. One of the approaches of the study proposed by V.T. Coiter [7] is to apply an asymptotic analysis based on the general theory of supercritical behavior. In this case, the sensitivity to imperfections is described as a measure of the initial postcritical behavior and the determination of the first zero coefficient in the power law of the load parameter on the amplitude of stability loss form. Coiter's method has become widely used in computational practice, but its usage imposes a strict limitation on the magnitude of imperfection and its shape. Another approach consists in a direct analysis of the nonlinear deformation of a shell with a curved shape of the middle surface based on one of the grid methods of discretization of the resolving equations. But this method has not received distribution because of the significant expenditure of computer time.

The development of new ideas in the understanding of nonlinear mechanics was greatly aided by the appearance of computers. Their use for nonlinear shell analysis has now reached such a level that it makes it possible to investigate the global behavior of thin-walled systems, including the problems of constructing a load trajectory in a given region of states, establishing buckling points and so on.

At the same time, for practical tasks, it is necessary to analyze various types of imperfections in shells that are characterized not only by the presence of a common continuous initial background of imperfections of limited amplitude but also by specific types of deflections of medium and large amplitudes caused by technological reasons: the manufacture of panels from sheet metal, their welding, mounting by welding to them discrete ribs, which have their imperfections in shape, etc.

1. Taking into account the actual geometry of the reservoir wall in the study of stability

The oil tank is located in the south of Ukraine and is a cylindrical shell with a radius of $R_{cp}=19,978$ m, height $H=17,88$ m. The thickness of the shell wall differs in height and acquires a value of 7,63 mm to 15,98 mm. The wall of the tank is made of steel with mechanical characteristics: $E=2,06 \cdot 10^{11}$ Pa, $\mu=0,3$, $\rho=7800$ kg/m³. At the stage of manufacture, transportation and operation in the wall of the reservoir imperfections of form arose. As a result of the theodolite survey, actual radial deviations of the intersection points of generatrices with horizontal boundaries of the shell belts were obtained. The reservoir calculation model is constructed in a finite element program complex in a cylindrical coordinate system. The initial deviations of the generatrix were added to the corresponding coordinates of the ideal surface and spline curves were constructed from the modified coordinates and then spline surfaces. The shell wall model with imperfect geometry is represented as a triangular finite element grid, and the number of model nodes is greater than the number of initial points of the envelope generators. To visualize the actual imperfections, a special program has been created that allowed the radial deviations of all points of the generatrices to be represented on a certain scale and turn them into deviations of nodes of the finite element model in the Cartesian coordinate system. In Fig. 1 shows the finite element model of the reservoir in different planes, as an example of visualization of actual wall imperfections in a 1:20 scale.

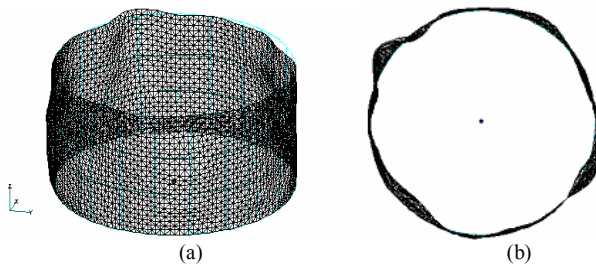


Fig. 1. Finite element model of an imperfect shell: side view (a), top view (b)

The problem of stability of the imperfect shell consisted in determining the critical values of axial compression and surface pressure separately for each load and with their combined action. The procedure of solving the non-linear static problem using the modified Newton-Raphson method is applied. Fig. 2 shows the loading curves of the shell surface pressure for three nodes, in which maximum displacements were observed at different loading stages. Surface pressure was supplied in the form $q = \beta q_{cr}^0$, where $q_{cr}^0 = 1257,4 \text{ N/m}^2$ – the critical load value for a shell with an ideal wall shape.

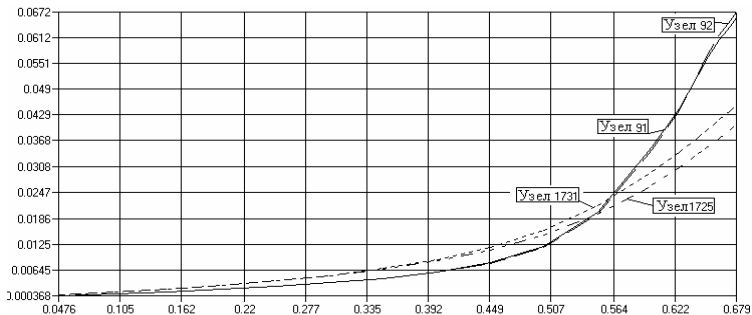


Fig. 2. Load curves for non-linear calculations

The buckling of the shell, taking into account the imperfections of the wall, occurred at $\beta_{cr} = 0,679$. The critical value of the surface pressure was $q_{cr} = 853,77 \text{ N/m}^2$. The stress-strain state of an imperfect shell with loss of stability is shown in Fig. 3.

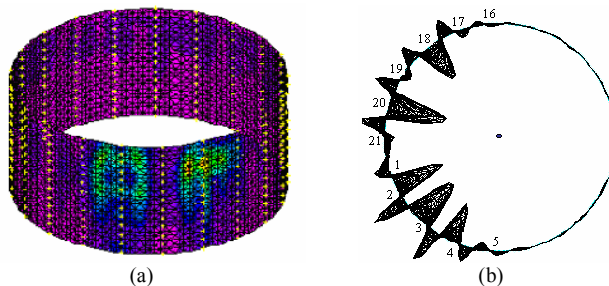


Fig. 3. Buckling of the shell under the action of surface pressure: state of stress (a), form of deformation (b)

The maximum equivalent stress in the wall elements from the outside of the shell (Plate Top VonMises Stress) was 55,235 MPa, which is lower than the design resistance of steel $R_y = 240$ MPa.

The results of an investigation of the stability of the tank imperfect shell under axial compression, which was given in the form $P = \beta P_{cr}^0$, where $P_{cr}^0 = 430597,8$ N/m is the critical load value for a shell with an ideal wall shape, are shown in Fig. 4 and 5.

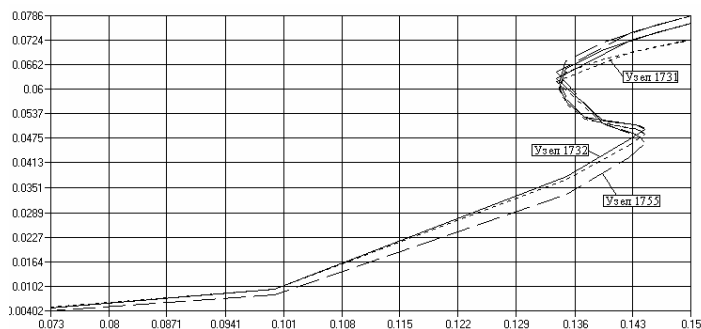


Fig. 4. Load curves of an imperfect shell by axial compression

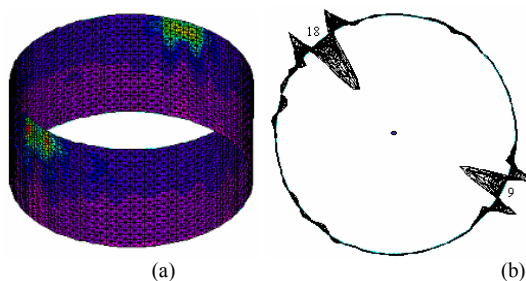


Fig. 5. The loss in stability of an imperfect shell under axial compression: state of stress (a), form of deformation (b)

Buckling of the shell taking into account wall imperfections occurred at $\beta_{cr} = 0,145$. The critical value of axial compression was $P_{cr} = 62436,68$ N/m.

The maximum equivalent stresses on the outside of the shell (Plate Top VonMises Stress) for axial compression

were 53,732 MPa, which is less than the design resistance of steel $R_y = 240$ MPa.

Investigation of the reservoir stability in the combined action of axial compression and surface pressure is of particular interest. The combined load is given in the form $[\alpha P_{cr}^0; (1-\alpha)q_{cr}^0]$, where $\alpha = [0; 0,3; 0,5; 0,7; 1]$ is the dimensionless combination factor. As a result of solving the nonlinear problem of statics, the coefficients of the critical combined loading β_{cr} are determined, which allowed us to determine the critical values of axial compression and surface pressure when they act together on an imperfect shell by formulas: $[P_{cr}; q_{cr}] = [\beta_{cr} \alpha P_{cr}^0; \beta_{cr} (1-\alpha) q_{cr}^0]$. Fig. 6 shows the stress-strain state of a

reservoir with real shape imperfections for three critical combinations of loads $0,201[0,3P_{cr}^0;0,7q_{cr}^0]$, $0,362[0,5P_{cr}^0;0,5q_{cr}^0]$ and $0,158[0,7P_{cr}^0;0,3q_{cr}^0]$.

Table 1 illustrates the values of the critical combinations of axial compression and surface pressure $[P_{cr};q_{cr}]$ for different values of the load combination factor α .

Table 1

α	$[\alpha P_{cr}^0;(1-\alpha)q_{cr}^0], (N/m;N/m^2)$	β_{cr}	$[P_{cr};q_{cr}], (N/m;N/m^2)$
0	[0; 1257,4]	0,679	[0; 853,77]
0,3	[143517,21; 977,87]	0,362	[51950,36; 353,97]
0,5	[252811,93; 738,24]	0,201	[50711,55; 148,08]
0,7	[362908,42; 454,17]	0,158	[57244,45; 71,64]
1	[430597,8; 0]	0,145	[62436,68; 0]

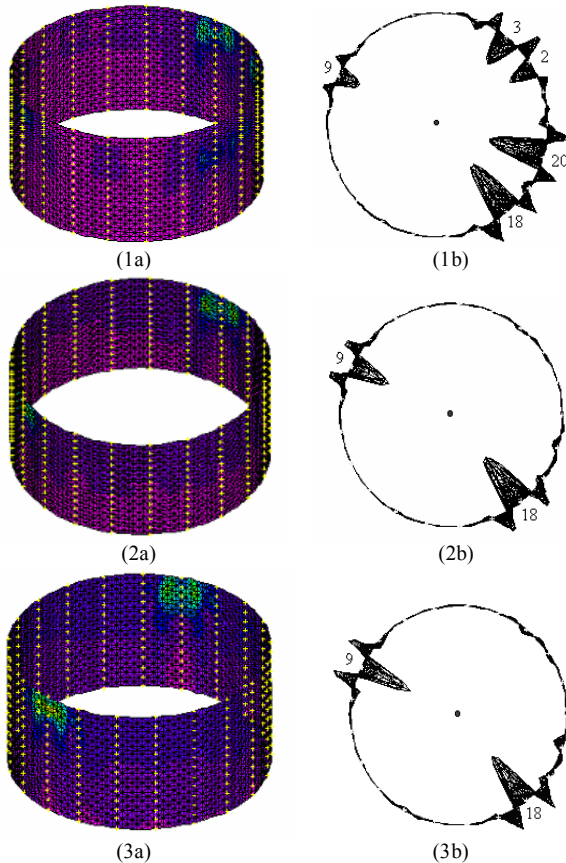


Fig. 6. The loss in stability of the reservoir with real imperfections in shape under combined loading $0,362[0,3P_{cr}^0;0,7q_{cr}^0]$ (1), $0,201[0,5P_{cr}^0;0,5q_{cr}^0]$ (2) and $0,158[0,7P_{cr}^0;0,3q_{cr}^0]$ (3): state of stress (a), form of deformation (b)

The maximum equivalent stresses on the outside of the shell (Plate Top VonMises Stress) for the three critical load combinations $0,362[0,3P_{cr}^0; 0,7q_{cr}^0]$, $0,201[0,5P_{cr}^0; 0,5q_{cr}^0]$ and $0,158[0,7P_{cr}^0; 0,3q_{cr}^0]$ respectively were 75,281 MPa, 99,201 MPa and 69.360 MPa, and were less than the design resistance of the steel $R_y = 240$ MPa.

For a tank with real wall shape imperfections, a stability diagram is constructed, load ranges are established, in which the conditions for ensuring general stability are realized under the combined action of axial compression and surface pressure. The region of stability of the shell is bounded by the curve of

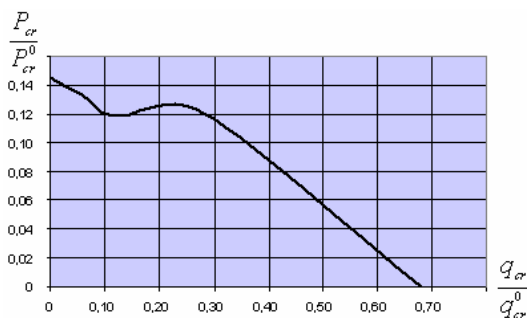


Fig. 7. The region of stability of the reservoir with real imperfections in shape

external uniform pressure.

2. Stability of the reservoir with simulated irregular imperfections of the shape under the action of a combined load

The use of analytical methods for solving the problem of stability determined the form of imperfections as trigonometric functions [1], which significantly narrowed the range of studies. With a separate action of surface tension or axial compression, the initial imperfection in many cases was adopted as corresponding buckling forms, because such a model of regular imperfections had the greatest influence on the stability of the shell. Under the action of combined loading, the problem of modeling the initial imperfections of the shell is more complicated. But the availability of modern computing systems allows you to specify imperfections of the shell wall in an arbitrary form.

This article propose a numerical approach to the determination of the stability of cylindrical shells with irregular imperfections of the shape under the combined action of axial compression and surface pressure [4]. The approach made it possible to model imperfections in the form of combinations of shell buckling forms, which were obtained a separate action of axial compression and surface tension, to assess the impact of imperfections on the critical values of the combined load and to determine the stability region of the reservoir with variable wall thickness when acting combined loading.

The computational model is formed with the help of a finite element analysis computational complex [17] for a shell segment containing 425 nodes and 768

the equilibrium state and the coordinate axes (Fig. 7).

The reliability of the obtained results is confirmed with the help of theoretical formulas [2] and formulas for practical calculations [14] of the critical stress in the shell, which is caused by the action of uniform compression parallel to the generatrices and at an

flat triangular elements. In the nodes of the boundary generators of the segment, displacements along the circle and rotation angles around the radius and generatrix are forbidden. The imperfection of the wall is represented as combinations of a perfect shell buckling forms under the separate action of axial compression and surface pressure: $[\gamma \vec{\Phi}_p; (1-\gamma)\vec{\Phi}_q]$, where

$\gamma = [0; 0,3; 0,5; 0,7; 1]$ – the dimensionless coefficient, $\vec{\Phi}_p$ and $\vec{\Phi}_q$ – the vectors of the buckling forms of the perfect shell under the action of axial compression and surface pressure, respectively. A program, in which the components of the vectors of the buckling forms are added to the corresponding coordinates of the middle surface of the perfect shell is created in such a way that the maximum amplitude of the initial imperfection takes on the values $[0,5t_{min}; t_{min}; 1,5t_{min}; 2t_{min}]$, where $t_{min} = 7,63$ mm is the minimum wall thickness. The combined loading (see Section 1) is specified in the form of combinations of axial compression and surface pressure $[\alpha P_{cr}^0; (1-\alpha)q_{cr}^0]$, where α – the dimensionless combination factor, acquires a value $[0; 0,3; 0,5; 0,7; 1]$.

The solution of the nonlinear equilibrium equations is carried out using the modified Newton-Raphson method. The loss of stability of the shell occurs with a critical combination of axial compression and surface pressure: $[P_{cr}; q_{cr}] = [\beta_{cr}\alpha P_{cr}^0; \beta_{cr}(1-\alpha)q_{cr}^0]$, where β_{cr} is the critical load parameter, the value of which is given for a cylindrical shell with imperfections of different shapes and maximum amplitude Δ_{max} in Table 2.

Table 2

Δ_{max}	α	Critical load parameter β_{cr}				
		$\gamma = 0$	$\gamma = 0,3$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 0,7$	$\gamma = 1$
$0,5t_{min}$	0	0,742	0,795	0,846	0,866	0,934
	0,3	0,485	0,5	0,45	0,45	0,4
	0,5	0,55	0,55	0,5	0,45	0,4
	0,7	0,6	0,6	0,55	0,5	0,45
	1	0,8	0,65	0,6	0,55	0,5
t_{min}	0	0,601	0,626	0,682	0,754	0,9
	0,3	0,375	0,3	0,3	0,269	0,276
	0,5	0,4	0,35	0,3	0,282	0,3
	0,7	0,45	0,35	0,3	0,3	0,3
	1	0,619	0,4	0,35	0,32	0,33
$1,5t_{min}$	0	0,5	0,524	0,6	0,702	0,842
	0,3	0,3	0,25	0,25	0,25	0,25
	0,5	0,3	0,25	0,25	0,25	0,253
	0,7	0,35	0,264	0,278	0,274	0,264
	1	0,5	0,3	0,297	0,289	0,284
$2t_{min}$	0	0,4	0,45	0,486	0,517	0,821
	0,3	0,25	0,2	0,2	0,21	0,243
	0,5	0,25	0,206	0,215	0,25	0,25
	0,7	0,3	0,25	0,25	0,25	0,268
	1	0,3	0,28	0,27	0,27	0,275

It can be seen that the influence of the form of the wall imperfection of a reservoir with variable thickness is not proportional to the corresponding combinations of loads. That is, the critical load parameter is not minimal when the form factor of the imperfection and the load factor coincide, which is typical for cylindrical shells with a constant wall thickness.

To determine the stability region of a reservoir with simulated wall imperfections, critical ratios of axial compression and surface pressure in the form $\left[P_{cr} / P_{cr}^0; q_{cr} / q_{cr}^0 \right]$ are determined. Table 3 presents the results of calculations for a shell with imperfections of various shapes and amplitude Δ_{\max} .

Table 3

Δ_{\max}	α	Combined load critical value $[P_{cr} / P_{cr}^0; q_{cr} / q_{cr}^0]$				
		$\gamma = 0$	$\gamma = 0,3$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 0,7$	$\gamma = 1$
$0,5t_{\min}$	0	[0;0,742]	[0;0,795]	[0;0,846]	[0;0,866]	[0;0,934]
	0.3	[0,146;0,34]	[0,145;0,35]	[0,135;0,315]	[0,135;0,315]	[0,12;0,28]
	0.5	[0,275;0,275]	[0,275;0,275]	[0,25;0,25]	[0,225;0,225]	[0,2;0,2]
	0.7	[0,42;0,18]	[0,42;0,18]	[0,385;0,165]	[0,35;0,15]	[0,315;0,135]
	1	[0,8;0]	[0,65;0]	[0,6;0]	[0,55;0]	[0,5;0]
t_{\min}	0	[0;0,601]	[0;0,626]	[0;0,682]	[0;0,754]	[0;0,9]
	0.3	[0,113;0,263]	[0,09;0,21]	[0,09;0,21]	[0,081;0,188]	[0,083;0,193]
	0.5	[0,2;0,2]	[0,175;0,175]	[0,15;0,15]	[0,141;0,141]	[0,15;0,15]
	0.7	[0,315;0,135]	[0,245;0,105]	[0,21;0,09]	[0,21;0,09]	[0,21;0,09]
	1	[0,619;0]	[0,4;0]	[0,35;0]	[0,32;0]	[0,33;0]
$1,5t_{\min}$	0	[0;0,5]	[0;0,524]	[0;0,6]	[0;0,702]	[0;0,842]
	0.3	[0,09;0,21]	[0,075;0,175]	[0,075;0,175]	[0,075;0,175]	[0,075;0,175]
	0.5	[0,15;0,15]	[0,125;0,125]	[0,125;0,125]	[0,125;0,125]	[0,127;0,127]
	0.7	[0,245;0,105]	[0,185;0,075]	[0,195;0,083]	[0,192;0,082]	[0,185;0,079]
	1	[0,5;0]	[0,3;0]	[0,297;0]	[0,289;0]	[0,284;0]
$2t_{\min}$	0	[0;0,4]	[0;0,45]	[0;0,486]	[0;0,517]	[0;0,821]
	0.3	[0,075;0,175]	[0,06;0,14]	[0,06;0,14]	[0,063;0,125]	[0,073;0,17]
	0.5	[0,125;0,125]	[0,103;0,103]	[0,108;0,108]	[0,125;0,125]	[0,125;0,125]
	0.7	[0,21;0,09]	[0,175;0,075]	[0,175;0,075]	[0,175;0,075]	[0,188;0,08]
	1	[0,3;0]	[0,28;0]	[0,27;0]	[0,27;0]	[0,275;0]

Fig. 8 shows the stability regions of a reservoir with irregular imperfections that lie between the coordinate axes and the equilibrium curves. The effect of imperfections on the stability region is not proportional to the corresponding combinations of loads. It can be seen that the stability regions are different for a shell with various forms of irregular imperfections.

We consider that the stability region of the shell with the corresponding maximum amplitude of imperfection of the wall is the region that lies between the coordinate axes and the curves with the minimum values of the critical loads combinations presented in Table 4 and in Fig. 9.

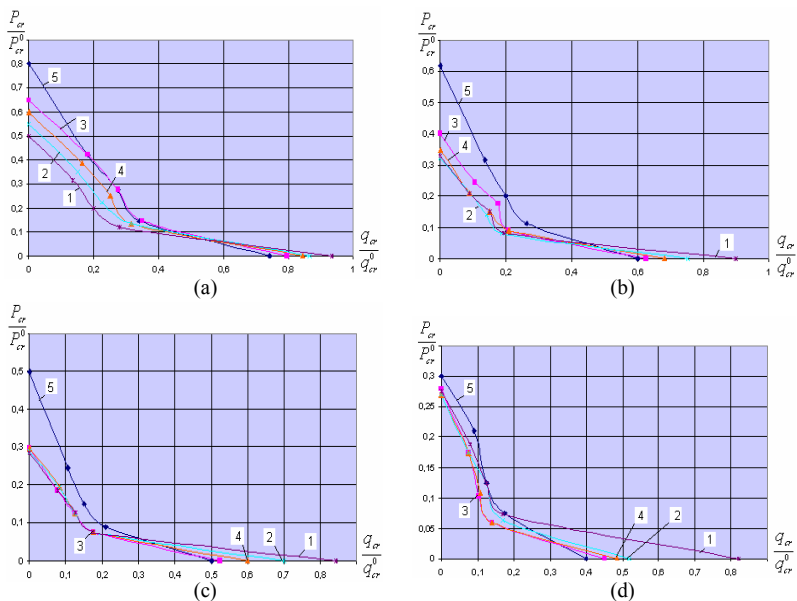


Fig. 8. Diagrams of reservoir stability regions with imperfections of different form: 1 - $\gamma = 0$; 2 - $\gamma = 0,3$; 3 - $\gamma = 0,7$; 4 - $\gamma = 0,5$; 5 - $\gamma = 1$ and different maximum amplitude: (a) - $0,5t_{min}$; (b) - t_{min} ; (c) - $1,5t_{min}$; (d) - $2t_{min}$

Table 4

Minimum combined load critical value $[P_{cr} / P_{cr}^0; q_{cr} / q_{cr}^0]_{min}$			
$0,5t_{min}$	t_{min}	$1,5t_{min}$	$2t_{min}$
[0; 0,742]	[0; 0,601]	[0; 0,5]	[0; 0,4]
[0,12; 0,28]	[0,081; 0,188]	[0,075; 0,175]	[0,06; 0,14]
[0,2; 0,2]	[0,141; 0,141]	[0,125; 0,125]	[0,103; 0,103]
[0,315; 0,135]	[0,21; 0,09]	[0,185; 0,079]	[0,175; 0,075]
[0,5; 0]	[0,32; 0]	[0,284; 0]	[0,27; 0]

Fig. 9(a) shows the curves of the minimum critical ratios of axial compression and surface pressure of the imperfect shell.

It's obvious that an increase in the maximum amplitude of imperfection leads to a decrease in the stability region of the shell.

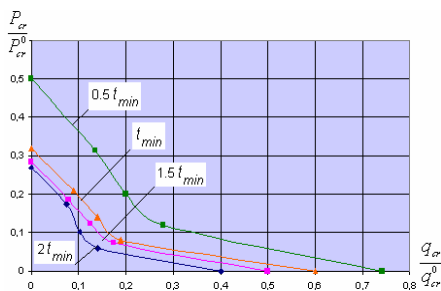


Fig. 9. Curves of critical axial compression and surface pressure ratios of the reservoir with imperfections as combinations of buckling forms

3. Determination of failure region in stability of the reservoir with real wall imperfections

One of the basic concepts of theory of structural reliability is the concept of failure [1, 3]. A failure is a partial or total loss of system quality. In construction mechanics, this notion corresponds to the notion of a limit state. For practical purposes, it is often necessary to assess the probability that the system's response will be in the field of failure-free operation. Then the reliability R of the system is defined as the probability of finding the element of the system reaction vector $S(\tau)$ in the admissible region Ω_0 during the time interval $[0 \leq \tau \leq t]$:

$$R = P_{suc} = Prob[S(\tau) \in \Omega_0; 0 \leq \tau \leq t].$$

The probability of failure is a addition to the reliability function:

$$P_{fail}(t) = 1 - P_{suc}.$$

In our case, the failure of the shell in stability is considered, because this type of failure for thin-walled shell structures is more dangerous. For various combinations of axial compression and surface pressure, there is an area that characterizes the ability of the oil reservoir to perceive the combined load and not lose stability. In the work of graphical representation of shell failure-free operation region Ω_0 , we can consider the stability region of the reservoir with the maximum permissible amplitude of the imperfection $\Delta_{max} = 2t_{min}$ (Fig. 9). Reliability of fail-safe work of building constructions for limit states is $P_{suc} = 99,9\%$ [1]. It is the probability that the reservoir's reaction vector $S(\tau)$ will stay in the permissible region Ω_0 for a time interval $[0 \leq \tau \leq t]$.

Let's show in Fig. 10 the stability region of the tank with real imperfections of the wall, which is between curve 1 and coordinate axes, and the admissible area of failure-free operation region Ω_0 , which is limited by curve 2 and coordinate axes.

Let's show in Fig. 10 the stability region of the tank with real imperfections of the wall, which is between curve 1 and coordinate axes, and the admissible

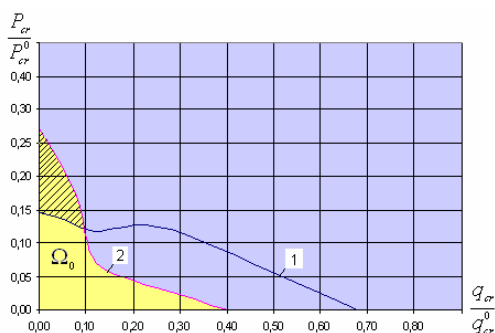


Fig. 10. Curves of critical ratios of axial compression and surface pressure of a tank with imperfections: 1 - real; 2 - modeled as forms of loss of stability

area of failure-free operation, which is limited by curve 2 and coordinate axes. We see that an additional area of failure arose due to the lack of a general stability of the wall in this region. The additional region of failure is 28.2% of the of the failure-free operation region, therefore the reliability of the stability of the tank with real imperfections decreased to $P_{suc} = 71,7\%$.

To ensure the overall stability of the tank wall, it is recommended to introduce additional stiffening elements (ribs, rings) into the structure.

Conclusion. The developed numerical technique with application of the program complex of finite element analysis procedures allowed to investigate the stability of the oil reservoir with actually measured imperfections of the wall shape under the joint action of axial compression and surface pressure; get an feasible failure-free operation region of the reservoir with modeled imperfections of the form as relationships of buckling forms; graphically represent the failure region in stability of the reservoir with real imperfections of the wall.

REFERENCES

1. *Augusti G., Baratta A., Kashiati F.* Veroyatnostnyie metodyi v stroitelnom proektirovani (Probabilistic methods in construction design) / Per. s angl. – M.: Stroyizdat, 1988.-584 s.
2. *Arbosh I.* Vliyaniye nablyatnykh progibov na ustoychivost obolochek (Influence of initial deflections on the stability of shells) // Tonkostennyye obolocheynyie konstruksii. – M.: Mashinostroenie, 1980. – S.222-259.
3. *Bolotin V.V.* Metodyi teorii veroyatnostey i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzheniy (Methods of probability theory and reliability theory in calculations of structures). –M.: Stroyizdat, 1982.-351 s.
4. *Volmir A.S.* Ustoychivost deformiruemykh sistem (Stability of deformable systems). – M.: Nauka, 1967. – 984 s.
5. *Timoshenko S.P.* Ustoychivost sterzhney, plastin i obolochek (Stability of rods, plates and shells) – M.: Nauka, 1971. – 807 s.
6. *Donnell L.G., Van K.* Vliyaniye nepravilnostey v forme na ustoychivost sterzhney i tonkostennykh tsilindrov pri osevom szhatii (Influence of irregularities in the form on the stability of rods and thin-walled cylinders under axial compression) // *Mehanika. Sb. perev. i obz. inostr. period. litryi.* – 1951. – №408, S.91 – 107.
7. *Koyter V.T.* Ustoychivost i zakriticheskoe povedeniye uprugih sistem (Stability and supercritical behavior of elastic systems) // *Mehanika: Sb. perev. inostr. statey.* – 1960. – №5, S.99 – 110.
8. *Gavrilenko G.D.* Chislennyiy i analiticheskiiy podhodyi k issledovaniyu nesuschey sposobnosti nesovershennykh obolochek (Numerical and analytical approaches to the study of the bearing capacity of imperfect shells) // *Prik. mehanika.* – 2003. – 39, №9. – S.44-62.
9. *Gotsulyak E.A., Lukyanenko O.A., Shah V.V.* Ob ustoychivosti tsilindricheskikh obolochek peremennoy tolschinyi s nachalnymi nesovershenstvami (On the stability of cylindrical shells of variable thickness with initial imperfections) // *Prikladnaya mehanika: Mezhdunar. nauchn. zhurnal.* – 2009. – T.45. - №4. – S.103-108.
10. *Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Solovej M.O.* Neliniine deformuvannia ta stiikist pruznykh obolonok neodnorodnoi struktury (Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure) – K.: ZAT „Vipol”, 2010. – 316 s.
11. *Gotsulyak Ye.O., Lukyanenko O.O., Kostina O.V., Haran I.H.* Stiikist tsylindrychnoi obolonky-opory z nedoskonalostiami formy pry kombinovanomu navantazheni (Stability of cylindrical shell-support with imperfections of the form at a combined loading) // *Problemy mitsnosti.* – 2012. – №5. – S.127-134.
12. *Bazhenov V.A., Lukyanenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V.* Imovirnisnyi pidkhid do vyznachennia nadiinosti nedoskonaloï obolonky-opory (Probabilistic approach to determining the reliability of the imperfect shell-support) // *Problemy mitsnosti.* – 2014. – №4. – S.152-161.
13. *Bazhenov V.A., Lukyanenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V.* Probabilistic Approach to Determination of Reliability of an Imperfect Supporting Shell // *Strength of Materials: Volume 46, Issue 4 (2014), Page 567-574.*
14. *Bazhenov V.A., Lukyanenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V.* Doslidzhennia neliniinoï stiikosti tonkostinnykh obolonok z pochatkovymy nedoskonalostiamy formy Investigation of nonlinear stability of thin-walled shells with initial imperfections of form // *Zb. Opir materialiv ta teoriia sporud.* K.: KNUBA, 2015. Vyp.96. . – S.99 -115.
15. *Bazhenov V.A., Lukyanenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V.* Neliniina stiikist dovhoi hnuchkoi tsylindrychnoi obolonky z nedoskonalostiami formy (Nonlinear stability of a long flexible cylindrical shell with imperfections in shape) // *Problemy mitsnosti.* – 2016. – №2. – S.140-147.

16. *Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V.* Nonlinear Bending Stability of a Long Flexible Cylindrical Shell with Geometrical Imperfections //Strength of Materials: Volume 48, Issue 2 (2016), Page 1-7.
17. *Shimkovich D.G.* Raschet konstruksiy v MSC/NASTRAN for Windows (Calculation of structures in MSC / NASTRAN for Windows). - M.: DMK Press, 2001.– 448 s.

Стаття надійшла 7.03.2018

Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Kostina O.V.

DEFINITION OF THE FAILURE REGION OF THE OIL TANK WITH WALL IMPERFECTIONS IN COMBINED LOADING

The presence of defects in real oil tanks plays an essential role in their accident-free operation. The majority of theoretical and experimental studies are devoted to the investigation of the effect of defects in the form of initial imperfections of the shape of thin shells on the carrying capacity and stability. Initial imperfections are the main factor that reduces the critical load. The first of the studies of the sensitivity of the critical load to the initial geometric imperfections of the form was performed by L. Donnell. A special role in the development of the theory of stability of imperfect shells was played by the asymptotic method of V.T. Coiter, which is used in J. Hutchinson. I.Arbosh, Ch.Bebkok, J.C.Amazigo and others research. Most of these papers were carried out on the assumption of linear critical behavior of the solution. In the future, for a detailed account of the imperfect geometry of nonlinearly deformed shells under an arbitrary load action, the researchers began to apply the synthesis of the reduction method and the Coiter method. At present, there are modern computational complexes that allow us to introduce initial imperfections directly as geometric parameters of the middle surface of the shells. The solution of the nonlinear problem in such formulation can more fully reflect the influence of the initial imperfections on the decrease of the critical load. However, the problem of determining the permissible failure-free operation region of tanks with real imperfections of the shape under the action of combined loading remains important.

The stability of an oil reservoir with real imperfections of a wall under the joint action of axial compression and surface pressure is studied using a program complex of finite element analysis. To determine the permissible range of fail-safe operation of the reservoir, irregular imperfections of the middle wall surface are simulated as ratios of the buckling forms with different maximum amplitudes obtained in solving the problem of loss of stability by the Lanczos method. The stability of the shell with real and simulated imperfections of the wall is investigated using the nonlinear static problem by the Newton-Raphson method. Critical ratios of axial compression and surface pressure are determined to ensure overall stability of the reservoir wall. The region of failure on the stability of the oil reservoir with real imperfections is obtained.

Key words: cylindrical shell, imperfection of shape, stability, combined loading, failure region.

Баженов В.А., Лук'яненко О.О., Костіна О.В.

ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТІ ВІДМОВИ НАФТОВОГО РЕЗЕРВУАРА З НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ СТІНКИ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Досліджена стійкість нафтоналивного резервуара з реальними недосконалостями стінки при сумісній дії осевого стиснення і поверхневого тиску. Побудована допустима область безвідмовної роботи резервуара зі змодельованими недосконалостями форми у вигляді сполучень форм втрати стійкості; графічно визначена область відмови за стійкістю резервуара з реальними недосконалостями стінки.

Ключові слова: циліндрична оболонка, недосконалість форми, стабільність, комбіноване навантаження, область відмови.

Баженов В.А., Лукьянченко О.А., Костина Е.В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ОТКАЗА НЕФТЯНОГО РЕЗЕРВУАРА С НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ СТЕНКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Исследована устойчивость нефтяного резервуара с реальными несовершенствами стенки при совместном действии осевого сжатия и поверхностного давления. Построена допустимая область безотказной работы резервуара со смоделированными несовершенствами формы в виде комбинаций форм потери устойчивости; графически определена область отказа по устойчивости резервуара с реальными несовершенствами стенки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, несовершенство формы, устойчивость, комбинированная нагрузка, область отказа.

Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Костіна О.В. Визначення області відмови нафтового резервуара з недосконалостями стінки при комбінованому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 27-39.

Досліджена стійкість нафтоналивного резервуара з реальними недосконалостями стінки при сумісній дії осьового стиснення і поверхневого тиску. Побудована допустима область безвідмовної роботи резервуара зі змодельованими недосконалостями форми у вигляді сполучень форм втрати стійкості; графічно визначена область відмови за стійкістю резервуара з реальними недосконалостями стінки.

Табл. 4. Іл. 10. Бібліогр. 17 назв.

Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Kostina O.V. Definition of the failure region of the oil tank with wall imperfections in combined loading / Strength of materials and theory of structures: Sci.&Tech. Collected Artcl. – K.: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 27-39.

The stability of an oil reservoir with real imperfections of the wall under the joint action of axial compression and surface pressure is studied. An admissible region of trouble-free operation of the reservoir with modeled imperfections of the form in the form of combinations of forms of stability loss is constructed; graphically determined the area of failure in the stability of the reservoir with real wall imperfections.

Табл. 4. Fig. 10. Ref. 17.

Баженов В.А., Лук'янченко О.А., Костіна Е.В. Определение области отказа нефтяного резервуара с несовершенствами стенки при комбинированном нагружении // Сопротивление материалов и теория сооружений: научно-тех. сборн. - К.: КНУСА, 2018. - Вып. 100. - С. 27-39.

Исследована устойчивость нефтяного резервуара с реальными несовершенствами стенки при совместном действии осевого сжатия и поверхностного давления. Построена допустимая область безотказной работы резервуара со смоделированными несовершенствами формы в виде комбинаций форм потери устойчивости; графически определена область отказа по устойчивости резервуара с реальными несовершенствами стенки.

Табл. 4. Ил. 10. Библиогр. 17 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри будівельної механіки КНУБА Баженов Віктор Андрійович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки, Баженов Віктор Андрійович.

Робочий тел.: +38(044) 245-55-55;

Мобільний тел.: +38(050) 351-66-21.

E-mail: vikabazh@ukr.net

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5802-9848>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

Робочий тел.: +38(044) 241-54-20.

Мобільний тел.: +38(067) 931-30-27.

E-mail: lukianch0907@meta.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1794-6030>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, КОСТІНА Олена Володимирівна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КОСТІНІЙ Олені Володимирівні.

Робочий тел.: +38(044) 241-54-20.

Мобільний тел.: +38(098) 275-19-93.

E-mail: kl0867@meta.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6692-6231>

УДК 624.012.6+691.615

ВИЗНАЧЕННЯ МІЦНОСТІ ТА ДОВГОВІЧНОСТІ СКЛА НА ОСНОВІ ЛІНІЙНО-ПРУЖНОЇ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

Б.Г. Демчина,

доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельних конструкцій та мостів

Т.Ю. Осадчук,

аспірант кафедри будівельних конструкцій та мостів

Національний університет "Львівська політехніка", Львів

Традиційно скло є естетичним матеріалом, не призначеним для несучих цілей. Міцність скла залежить від розподілу напружень, тривалості навантаження, стану поверхні та умов навколишнього середовища. Поверхневі дефекти або тріщини пов'язані з характерною крихкістю скла. Крихке руйнування скла - це катастрофічний режим відмови, при якому поверхневі дефекти або тріщини швидко поширюються під навантаженням на розтяг до критичного значення. Це можна змоделювати за допомогою лінійно-пружної механіки руйнування (ЛПМР). Інтенсивність пружних напружень в околі кінця тріщини описується коефіцієнтом інтенсивності напружень K_I . Аналітичними методами визначення міцнісних властивостей скла є: оцінка в'язкості руйнування K_{IC} або інертної міцності σ_{IC} та прогнозування тривалості експлуатації (часу руйнування) t_f від втоми. Використання таких розрахункових підходів на основі ЛПМР дозволяє отримати несучу здатність конструкцій із скла.

Ключові слова: міцність скла, дефекти (недоліки), подряпини, стрес-корозія (корозія під напруженнями), докритичне зростання тріщини (ДЗТ), лінійно-пружна механіка руйнування (ЛПМР), коефіцієнт інтенсивності напружень, статична втома, силовий закон, надійність, прогнозування довговічності, час руйнування

Постановка проблеми. В останній час скло все частіше розглядають як матеріал для несучих будівельних конструкцій. Основні його переваги – велика міцність, легкість, оптичні властивості (прозорість), екологічність [1], [2, с.79], [3, с.1-2], [4, с.46]. В свою чергу, конструкційне використання скла у безкаркасних скляних фасадах, скляних дахах і перекриттях дозволяє будівлям бути більш енергоефективними, максимально використовуючи денний та сонячний режими роботи [2, с.79], [5, с.157]. Водночас, при проектуванні несучих конструкцій із скла важливим залишається питання його крихкого руйнування [2, с.79], [4, с.46], що потребує детальніших досліджень.

Основні чинники, які визначають міцність скляних констукцій це: поверхневі дефекти (мікротріщини, подряпини, сколи), що залежать від виду та якості вихідного скла; характеру і умов прикладання навантаження; температури і зовнішнього середовища під час експлуатації [6].

Поверхневі дефекти в склі, такі як подряпини, недоліки або тріщини, зумовлюють поверхневі напруження, які можна змоделювати за допомогою ЛПМР [7], [8, с.79].

Незважаючи на те, що напруження, які виникають у склі, можуть бути нижчі, ніж міцність скла, наявні у ньому поверхневі тріщини все одно можуть поширюватись у певних умовах, особливо під впливом води. Це

явище називається докритичним зростанням тріщини (ДЗТ), що викликане корозією під напруженням або стрес-корозією, в якій вода або інший чинник хімічно руйнує молекулярний зв'язок Si-O [9].

Загалом, докритичне зростання тріщини може бути наслідком стрес-корозії або циклічної втоми. Докритичне зростання тріщини ініціює зростання існуючого дефекту до критичної довжини, що призводить до його катастрофічного росту. Механізм руйнування від докритичного зростання тріщини є явищем, викликаним дією навантаження з плином часу. Руйнування також може бути викликане впливом хімічної реакції, навколишнім середовищем, уламків, що затискаються біля кінця тріщини, тощо [10, с.1-2].

Згідно з технічною інформацією по прогнозуванню надійності та довговічності конструкцій за допомогою програмного забезпечення CARES/LIFE [10, с.13-14], розробленого в дослідницькому центрі NASA Glenn Research Center, феномен ДЗТ моделюється силовим законом, законом П. Періса і законом К. Уолкера. Силовий закон Е. Еванса і Ш. Вейдерхорна [11], [12], [13], [14] описує ріст тріщини як функцію від коефіцієнта інтенсивності напружень. Для циклічної втоми при моделюванні докритичного зростання тріщини використовується або закон П. Періса [15], або його модифіковане формулювання - закон К. Уолкера [16], [17]. Для характеристики варіації міцності елементів використовується двопараметрична функція розподілу Вейбулла [10, с.4-5].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Експериментальні дослідження міцності та деформативності скляних багатошарових плит, що працюють на згин представлено у попередніх статтях Демчини Б.Г., Осадчука Т.Ю. [18], [19], [20].

Основні положення силового закону докритичного зростання тріщини внаслідок втоми викладені у ряді робіт [10, с.126-128], [21, с.10-12], [22, с.3-4], [23, с.4-5]. Для режиму тріщиноутворення I (розтяг) співвідношення для коефіцієнта інтенсивності еквівалентних напружень K_{Ieq} наступне:

$$K_{Ieq}(\Psi, t) = \sigma_{Ieq}(\Psi, t) Y \sqrt{a(\Psi, t)}, \quad (1)$$

де Y - функція геометрії тріщини, яка може варіюватись з докритичним зростанням тріщини (згідно з CARES/LIFE величина Y - фіксована геометрична константа); $\sigma_{Ieq}(\Psi, t)$ - еквівалентні напруження для режиму I; $a(\Psi, t)$ - довжина тріщини; Ψ - розташування (x, y, z) та орієнтація (α, β) тріщини в тілі. У деяких моделях, таких як Вейбулла та PIA (сприйняття, інтерпретація та дія), відображається лише розташування. В рівняннях, що базуються на теорії Баддорфа, для об'ємного дефектного аналізу використовується $\Psi = (x, y, z, \alpha, \beta)$, а для поверхневого дефектного аналізу - $\Psi = (x, y, \alpha)$. Для моделі PIA: $\Psi = (x, y, z)$ - для об'ємного дефектного аналізу та $\Psi = (x, y)$ - для поверхневого дефектного аналізу [10, с.127].

Зростання тріщини як функція від коефіцієнта інтенсивності еквівалентних напружень для режиму I описується залежністю силового закону (СЗ):

$$\frac{da(\Psi, t)}{dt} = A K_{Ieq}^N(\Psi, t), \quad (2)$$

де A, N – показники зростання тріщини, константи, що залежать від матеріалу та середовища.

Підставивши рівняння (1) в рівняння (2), отримуємо:

$$\frac{da(\Psi, t)}{dt} = A \sigma_{Ieq}^N(\Psi, t) Y^N a(\Psi, t)^{\frac{N}{2}}. \quad (3)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (2) і (3), отримаємо вираз для $a(\Psi, t)$ при критичних ефективних напруженнях $\sigma_{Ieq, t}$:

$$a(\Psi, t) = \left(\frac{K_{IC}}{Y} \right)^2 \sigma_{Ieq, t}^{-2}(\Psi, t). \quad (4)$$

Продиференціювавши отриманий вираз (4) за часом та підставивши цей диференціал у рівняння (3), отримаємо:

$$\int_{\sigma_{Ieq, 0}}^{\sigma_{Ieq, t=t_f}} \sigma_{Ieq, t}^{N-3} d\sigma_{Ieq, t} = -A Y^2 \frac{K_{IC}^{N-2}}{2} \int_{t=0}^{t=t_f} \sigma_{Ieq, t}^N(\Psi, t) dt, \quad (5)$$

де $\sigma_{Ieq, 0}(\Psi)$ - критичні ефективні напруження при $t = 0$; $\sigma_{Ieq}(\Psi, t = t_f)$ - еквівалентні напруження у момент руйнування ($t = t_f$).

Перетворення еквівалентних напружень для режиму I $\sigma_{Ieq}(\Psi, t = t_f)$ у момент відмови ($t = t_f$) на критичні ефективні напруження $\sigma_{Ieq, 0}(\Psi)$ при ($t = 0$) відповідає співвідношенню (6):

$$\sigma_{Ieq, 0}(\Psi, t) = \left[\int_{t=0}^{t=t_f} \frac{\sigma_{Ieq, t}^N(\Psi, t) dt}{B} + \sigma_{Ieq, t}^{N-2}(\Psi, t_f) \right]^{\frac{1}{N-2}}, \quad (6)$$

де

$$B = \frac{2}{A Y^2 K_{IC}^{N-2} (N-2)}, \quad (7)$$

N (безрозмірний коефіцієнт) та B (напруження² × час) є параметрами втоми для системи «матеріал–середовище».

Перетворення залежності (6) для статичної, динамічної та циклічної втоми представлено в дослідженнях Н. Немета [10, с.135-141], [22, с.5], Ш. Вейдерхорна [21, с.8], М. Віенса [24, с.4-5] та ін. [23, с.5].

Постановка задачі. Для аналітичного визначення несучої здатності вільно опертих по чотирьох кутах багатошарових скляних плит, які працюють на згин від локального навантаження посередині, міцність та деформативність яких досліджують у Національному університеті «Львівська політехніка» [18], [19], [20], необхідно розглянути можливість використання методики розрахунку згідно з ЛПМР.

Вклад основного матеріалу. Практична міцність скла набагато менша, ніж теоретична через наявність дефектів (рис. 1), таких як: подряпини, недоліки, зовнішні або внутрішні тріщини. Наявність дефектів

пояснює, чому крихкі матеріали є менш міцніші при розтягу в порівнянні з їх міцністю на стиск [8, с. 79].

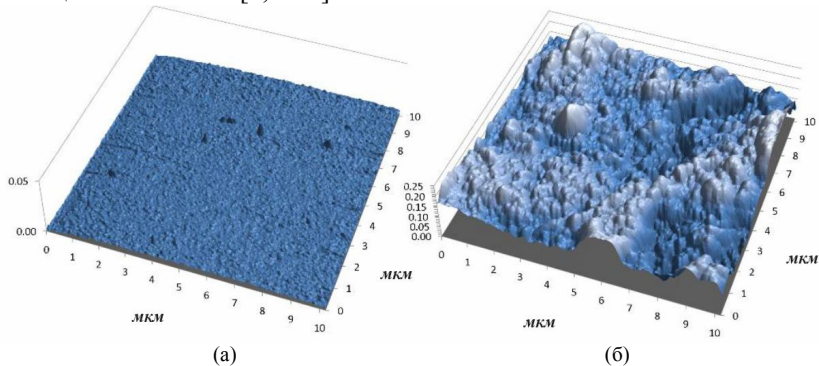


Рис. 1. Зображення дефектів поверхні скла під впливом вітру, отримані за допомогою атомно-силового мікроскопу [7]: (а) підвітряна сторона; (б) навітряна сторона

Інтенсивність напружень в околі вершини тріщини можна визначити коефіцієнтом інтенсивності напружень K_I , що залежить від геометрії тріщини та типу навантаження. Загальну формулу (1) коефіцієнта інтенсивності напружень для режиму тріщиноутворення I K_I можна представити у вигляді (8) [25, с.56-57], [26, с.14], [27, с.25], [28, с.43]:

$$K_I = \sigma Y \sqrt{\pi a}, \quad (8)$$

де K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень знаходиться за різними формулами [25, с.57-59], [26, с.16],[27, с.25-28] і залежить від геометрії та розмірів тріщини і зразка та типу прикладення навантаження; σ – напруження розтягу, що діють в напрямку, перпендикулярному до площини тріщини; a – розмір тріщини: половина довжини внутрішньої тріщини або довжина тріщини ззовні [29, с.217]; Y – безрозмірний коефіцієнт геометрії або функція геометрії, яка враховує геометричну форму поверхні та розмір тріщини, геометрію та розміри зразка, а також спосіб прикладення навантаження (закріплення). Даний коефіцієнт може враховувати окремі параметри, якщо інші містяться у зміненому вигляді загальної формули K_I (8) [25, с.57-59], [27, с.25-28]. Так, для розтягу і згину коефіцієнт Y може залежати тільки від форми центральної або крайньої тріщини [30, с.7-27-7-34] або взагалі не фігурувати як окрема величина [31, с.7-8].

Відповідно, можна сформулювати критерій зростання тріщини, за якого коефіцієнт інтенсивності напружень для конкретного випадку порівнюється з критичним значенням. Таким чином, тріщина зростатиме, поки K_I не досягне критичного значення K_{IC} . Значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_I може бути розраховане за формулою (8). Критичне значення K_{IC} приймається за експериментальними даними. Цей критичний коефіцієнт інтенсивності напружень є мірою в'язкості руйнування матеріалу [25, с.59], [28, с.43], [31, с.7-8].

Руйнуючі (критичні) напруження σ_c , пов'язані з довжиною тріщини a та в'язкістю руйнування K_{IC} , визначаються за залежністю (9) [26, с.18-19], [27, с.48-49], [28, с.44], [29, с.219-220], [31, с.8-9]:

$$\sigma_c = \frac{K_{IC}}{Y\sqrt{\pi a}}, \quad (9)$$

де K_{IC} – критичний коефіцієнт інтенсивності напружень, в'язкість руйнування, тріщиностійкість або опір розвитку тріщини.

З іншого боку, якщо відомі рівень напружень σ та в'язкість руйнування K_{IC} , то *максимально допустимий розмір тріщини* визначається за рівнянням (10) [26, с.18-19], [27, с.48-49], [28, с.44], [29, с.219-220], [31, с.8-9]:

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma Y} \right)^2. \quad (10)$$

У межах ЛПМР інтенсивність напружень K пов'язана із швидкістю вивільнення енергії деформації G наступним чином [25, с.59-61], [27, с.31-33], [32], [33], [34, с.17]:

$$G = \frac{\pi a \sigma^2}{E}; \quad K_I = Y \sigma \sqrt{\pi a} \rightarrow \rightarrow G = \frac{K_I^2}{E}; \quad (11)$$

$$\rightarrow G = \frac{K_I^2 (1 - \nu^2)}{E}, \quad (12)$$

де E - модуль пружності; ν - коефіцієнт Пуассона; Y , σ , a - параметри згідно з (1).

Рівняння (11) відповідає плоскому напруженому стану, (12) – для плоского деформованого стану.

Критична інтенсивність напружень K_{IC} та критична швидкість вивільнення енергії деформації G_c взаємопов'язані між собою через залежності за аналогією із рівняннями (11) та (12) [31, с.8-9]. При цьому G_c рівна повній енергії $2\gamma_f$, що включає пластичне розсіювання на одиницю площі зростання тріщини γ_p та поверхневу енергію γ_s (13) [26, с.11-12], [27, с.51-52]:

$$G_c = 2\gamma_f = 2(\gamma_s + \gamma_p). \quad (13)$$

Швидкість вивільнення енергії G є мірою енергії, необхідної для збільшення тріщини. Термін «швидкість» в даному випадку не відноситься до похідної по відношенню до часу, а є зміною потенціальної енергії по відношенню до площі тріщини. Тому, з похідної потенціальної енергії випливає, що G є також *силою розширення тріщини* або *рушійною силою тріщини R* [33]. Для матеріалів, які є дуже крихкими (наприклад, скло), розсіювання енергії під час зростання тріщини є незначним, тому різниця між R і G_c не дуже велика. Натомість, пластичні матеріали демонструють значне пластичне розсіювання, тому $G_c \gg R$ [25, с.26-27].

Зростання тріщин на поверхні скла (рис. 2), спричинене різними чинниками, призводить до феномена статичної втоми, яка характеризується

затримкою руйнування під постійним навантаженням або під навантаженням при сталій швидкості прикладання. Для дослідження статичної межі втоми в склі може бути використана методика механіки руйнування твердих тіл. Межа втоми визначається величиною коефіцієнта інтенсивності напружень в околі кінця тріщини K_I , при якій рух тріщини не відбувається. Пов'язавши K_I з ростом тріщини v , температурою, середовищем і структурою скла, отримують відповідні залежності $v - K_I$ [21, с.4-7]. Також для практичних цілей можна використовувати наявні експериментальні дані про ріст тріщини на основі залежності міцності σ від постійного навантаження або навантаження при сталій швидкості (інтенсивності) прикладання σ_i / σ_{i-1} [21, с.8-9].

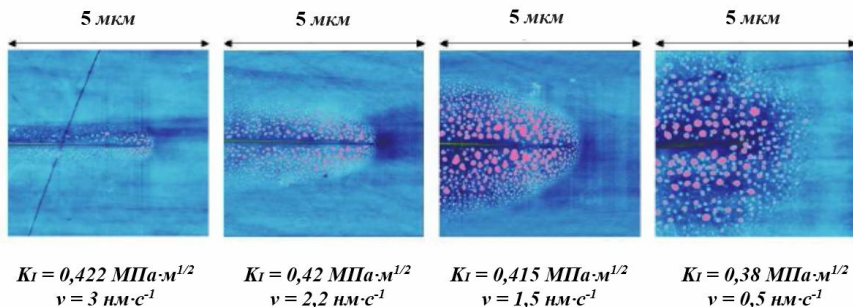


Рис. 2. Зображення росту тріщини в натрієво-кальцієвому склі при змінній вологості, скановані за допомогою атомного силового мікроскопу [35, с.27]

Схема типової кривої $v - K_I$ показана на рис. 3.

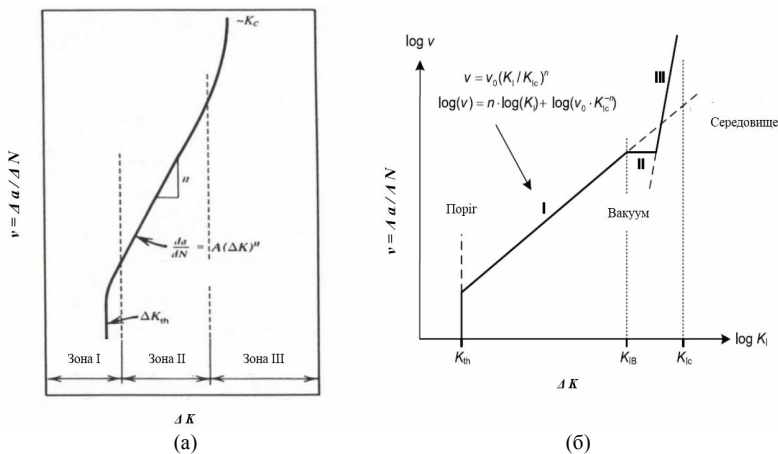


Рис. 3. Схема типової кривої $v - K_I$: (а) - для абстрактного матеріалу [37]; (б) - для скла [36, с.51-52]

На рис. 3 показані різні режими росту тріщини [36, с.51-52], [38, с.16-17], [39, с.2]: розповсюдження тріщини ініціюється, коли інтенсивність

напруження на тріщині збільшується за заданим порогом K_{th} ; як тільки поріг досягнуто, розповсюдження тріщини в зоні I є функцією реакції поверхневого дефекту з чинником (наприклад, вологою); зона II являє собою перехідну область, де є частина реакції тріщини на вологість і частина без реакції; нестабільний/неконтрольований ріст тріщини відбувається в зоні III, тут вологість уже не може взаємодіяти з тріщиною через швидкість розповсюдження. Після того, як інтенсивність напружень досягає в'язкості руйнування матеріалу, K_{IC} , настає руйнування. Зона I має практичне застосування, оскільки це зона стабільного зростання тріщини [38, с.16-17], [40]. Відповідно, найпоширенішим представленням графіка $v-K_I$ є розповсюдження тріщини в зоні I [41]. Область є лінійною на ділянці, вона має просте рівняння (14) (див. рис. 3(б)), яке легко інтегрувати для отримання терміну експлуатації [40]. Нахил цієї лінії n є ще одним параметром в томи [38, с.16-17]. Крутий нахил кривої в зоні I (див. рис. 3(б)), де швидкість тріщини стає дуже чутливою до K , дозволяє визначити порогове значення для зростання тріщини K_{th} , нижче якого зростання практично немає [40]. В літературі використовується також інше позначення для K_{th} , а саме K_{ISCC} [42, с.7-9], [43, с.9-10].

Експериментальні залежності $v-K_I$ для скла представлені у дослідженнях Ш. Вейдерхорна [21, с.4-7], [44, с.544-545], Т. Мічальське [45, с.114-115, 123], [46, с.5-6, 81-89], М. Чікотті [35, с.10-11,16], М. Халдіманна [28, с.41-42], С. Роунтрі [47, с.5-7], матеріалах Р. Брова [41], Дж. Мечольські [48], італійських нормах [49, с.34-35]. Також можна скористатись функціями залежності часу від напружень $v-\sigma_a$, наведеними у статтях М. Оверенда [7], [50], [51, с.21].

Силова функція залежності росту тріщини ($v = da/dt$) від коефіцієнта інтенсивності напружень K_I може бути представлена таким виразом (Ш. Вейдерхорн [21, с.8], Т. Мічальське [45, с.113-114], Х. Шольце [52, с.270], Н. Джеймс [40]):

$$v = \frac{da}{dt} = A K_I^n \text{ або } \log v = \log A + n \log K_I, \quad (14)$$

де v – швидкість росту тріщини розміром a за час t ; A і n – експериментально встановлені параметри (константи) поширення тріщини для конкретного матеріалу в певних умовах. Параметр n описує нахил кривої на графіку $v-K_I$ (див. рис. 3(б)). Аналогічно, константа A визначається з рівняння цієї кривої [52, с.270].

Згідно з М. Віенсом [24, с.4-5], М. Халдіманном [36, с.51-52], М. Сантарсьєро [39, с.2], М. Лінквіст [53, с.22-23] силову функцію v від K_I можна подати у вигляді (15):

$$v = v_o (K_I / K_{IC})^n, \quad (15)$$

де v_o – експериментально отриманий параметр швидкості поширення тріщини – константа, яка залежить, відповідно, від матеріалу та умов

експлуатації (як і параметри A і n), причому v_o (м/с) являє собою докритичне значення поширення тріщини при досягненні значення K_{IC} [24, с.4-5], [49, с.34-35]. Швидкість v_o пов'язана із параметром A залежністю $A = v_o \cdot K_{IC}^{-n}$ [36, с.51].

В результаті отримуємо розширений вираз для силової функції (16), який також наведений у статтях П. Бача [54, с.9-10], [55, с.10-11], М. Оверенда [50] та у нормах Італії з проектування скляних конструкцій CNR-DT 210/2013 [49, с.34-35]:

$$v = \frac{da}{dt} = A K_I^n = v_o \left(\frac{K_I}{K_{IC}} \right)^n = v_o \left(\frac{Y \sigma_a \sqrt{\pi a}}{K_{IC}} \right)^n. \quad (16)$$

Нижче певної порогової інтенсивності напружень близько $K_{th} = K_{ISCC} = 0,3K_{IC}$, незалежно від тривалості навантаження, зростання тріщини в склі не відбувається [56, с.153]. Для натрієво-кальцієвого силікатного скла, в залежності від середовища, це значення становить $K_{th} = K_{ISCC} = 0,20 \div 0,27 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ [28, с.80].

Миттєве руйнування натрієво-кальцієвого силікатного скла відбувається тоді, коли інтенсивність напружень K_I внаслідок напружень на кінці однієї тріщини досягає або перевищує критичну величину K_{IC} , яка, зазвичай, становить $0,75 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ [7]. Діапазон можливих значень K_{IC} в залежності від типу скла представлено у табл. 1. Величину K_{IC} , як і енергію (роботу) руйнування $G_c(\gamma_f)$, необхідно обирати для певного типу скла, враховуючи умови його експлуатації [52, с.264], [57, с.100-102], [58, с.45].

Таблиця 1

Критичний коефіцієнт інтенсивності напружень (в'язкість руйнування) K_{IC} для різних типів скла [28, с.80], [48, с.74], [52, с.264], [57, с.101],[58, с.45], [59, с.24]

Тип скла	$K_{IC}, \text{ МПа} / \text{м}^{0.5}$
Силікатне (silica)	0.73 - 0.81
Натрієво-кальцієве силікатне (soda-lime-silica)	0.70 - 0.82
Боросилікатне (borosilicate)	0.71 - 0.82
Алюмосилікатне (aluminosilicate)	0.81 - 0.96
Свинцеве силікатне (lead silicate)	0.62 - 0.73

Тривалість процесу корозії у склі з напруженнями визначається параметром тріщини n . Чим більше значення n , тим довговічнішим є скло [9]. Константа n також називається «параметром схильності до корозії» [48].

Оскільки параметри швидкості тріщини v_o і n залежать від матеріалу, температури та навколишнього середовища [50], [28, с.82-85], тому їх

значення приймають наступними: $v_o = 6 \text{ мм/с}$ та $n = 16$ - для оцінки скла, виготовленого за технологією флоат-процесу, що експлуатується у звичайних умовах, натомість для скла в умовах підвищеної вологості ці значення – $v_o = 30 \text{ мм/с}$ та $n = 16$.

Згідно з CNR-DT 210/2013 [49, с.35] в розрахункових цілях можна приймати такі значення «параметра схильності до корозії» n в залежності від умов експлуатації: для натрієво-кальцієвого силікатного скла – $n = 16$ з діапазону $n = 12 \div 16$, для боросилікатного скла – $n = 37,2$ з діапазону $n = 27 \div 40$.

Розмір порогової тріщини $a_0 = a_{th}$ та розмір критичної тріщини a_c отримують, замінюючи у рівнянні (10) коефіцієнт інтенсивності напружень K_I на $K_I = K_{th} = 0,25 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0,5}$ та $K_I = K_{IC} = 0,75 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0,5}$, відповідно [50].

Час руйнування t_f - час до досягнення критичної інтенсивності напружень K_{IC} . Провівши інтегрування рівняння (16) від початкової довжини тріщини a_i , де $K = K_{th}$, до кінцевої критичної довжини тріщини a_c , де $K_I = K_{IC}$, отримаємо час руйнування в інтегральній формі (17) [54, с.9-10], [55, с.10-11]:

$$t_f = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{v} = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{A(Y\sigma_a \sqrt{a})^n}. \quad (17)$$

Час руйнування t_f під діючим постійним навантаженням σ_a , як функція із силового закону, може бути записаний у вигляді (18), запропонованому у роботах М. Вієнса [24, с.4-5] та П. Бача [54, с.9-10], [55, с.10-11], Дж. Гласеманна [60, с.23-28]:

$$t_f = B \sigma_{IC}^{n-2} \sigma_a^{-n}, \quad (18)$$

де $B = \frac{2}{v_o Y^2 (n-2) \sigma_a^2 K_{IC}^{-2}}$ – експериментально визначений параметр зростання тріщини (як A і n), що обчислюється за середнім часом до руйнування та при відповідних прикладених напруженнях σ_a [24, с.4-5]; σ_{IC} – критичні напруження при початковій довжині тріщини або інертна міцність (міцність за відсутності докритичного зростання тріщини) [24, с.4-5], [28, с.44], [38, с.18-19] [54, с.9-10], [55, с.10-11], [61, с.224], [62, с.731].

Вираз для знаходження мінімального часу руйнування (19), представлений в дослідженні Ш. Вейдерхорна [21, с.10-11]:

$$t_{\min} = \frac{2\sigma_a^{-2} (K_{IC} \sigma_a / \sigma_p)^{2-n}}{A Y^2 (n-2)}, \quad (19)$$

де σ_p - напруження, які є більшими, ніж діючі напруження σ_a .

Якщо прийняти $\sigma_p = \sigma_{IC}$, то отримаємо наведену Х. Шольцем [52, с.271] залежність (20):

$$t_f > \frac{2\sigma_{IC}^{n-2}\sigma_a^{-n}}{\pi(n-2)AK_{IC}^{n-2}}. \quad (20)$$

Рівняння, що описує час руйнування, згідно з Т. Мічальське обчислюється за формулою (21) [45, с.114]:

$$t_f = \frac{2[(K_{IC}/K_{li})^{n-2} - 1]}{(n-2)AY^2\sigma_a^2K_{IC}^{n-2}}, \quad (21)$$

де K_{li} і K_{IC} – коефіцієнт початкової інтенсивності напружень та критичний коефіцієнт інтенсивності напружень (руйнування), відповідно.

У статті К. Дойла [38, с.19-20] подано наступний вираз (22):

$$t_f = \frac{2(K_{li}^{2-n} - K_{IC}^{2-n})}{(n-2)AY^2\sigma_a^2}. \quad (22)$$

Аналогічне по формі рівняння також запропоноване Н. Джеймсом [40]:

$$t_f = \frac{2}{Y^2\sigma_a^2\pi A} \int_{K_i}^{K_c} K^{1-n} = \frac{2}{Y^2\sigma_a^2\pi A} \left[\frac{K_{IC}^{2-n} - K_{li}^{2-n}}{2-n} \right]. \quad (23)$$

Альтернативні формули для t_f наведені також у роботах Дж. Мечольські [48], М. Оверенда [50], Г. Додда [63, с.123], В. Унгуряну [64].

Розрахунок фактичного часу руйнування вимагає наявності інформації про навколишнє середовище, прикладене навантаження (напруження) та початковий розмір дефекту. У багатьох випадках ця інформація невідома і може бути виведена з маркування поверхні тріщини, отриманої після руйнування [45, с.114]. Дослідження відповідних характеристик руйнування скла представлено у статті Дж. Мечольські [58]. Також початковий розмір тріщин за умови відсутності їх візуального спостереження та фіксування можна прийняти з наявних статистичних даних у вигляді діаграм залежності інертної міцності скла від розмірів дефектів, що представлені у дослідженнях В. Унгуряну [64], М. Оверенда [65, с.19], Р. Молда [66, с.128], С. Персоника [67, с.28] для різних станів поверхонь скла.

Висновки. Згідно з лінійно-пружною механікою руйнування для аналітичного методу розрахунку скляних конструкцій, зокрема вільно опертих по чотирьох кутах багатошарових скляних плит, які працюють на згин від локального навантаження посередині, можна використати наступні параметри міцності:

- критичні напруження в склі σ_{IC} за відсутності докритичного зростання тріщини розміром a_i , або короткочасну міцність скла σ_{IC} при наявності докритичного зростання тріщини з початковим розміром a_i (так звана «інертна міцність скла»), які розраховуються відповідно до рівняння (9);

- довговічність конструкцій із скла згідно з рівняннями (18)-(23) як час руйнування t_f при наявності умов для докритичного зростання тріщини з початковим розміром тріщини a_i під навантаженням при коефіцієнті інтенсивності напружень $K_i > K_{th} = 0,3K_{IC}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. New Developments in Load-Bearing Glass [Electronic resource]. – Retrieved from: <https://www.bdcuniversity.com/new-developments-load-bearing-glass>.
2. *Achintha M.* Sustainability of glass in construction [Electronic resource] / *M.Achintha // Sustainability of Construction Materials* / Ed. J. Khatib; Woodhead Publishing. – 2016. – P. 79-104. – Retrieved from: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100370-1.00005-6>
3. *Kalamar R.* Load Bearing Innovative Construction from Glass [Electronic resource] / *R. Kalamar, M. Eliášová // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2015. – Vol. 96. – 012066 (7 p.). – Retrieved from: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/96/1/012066>
4. *Šāble L.* Evaluation of Glass in Design of Load Bearing Structures [Electronic resource] / *L. Šāble, K. Kalnins // Proceedings of Civil Engineering '13: 4th International Scientific Conference, Latvia, Jelgava, 16-17 May, 2013*. – P.46-52. – Retrieved from: http://lluflb.llu.lv/conference/Civil_engineering/2013/part1/Latvia_CivilEngineering2013Vol4Part1_46-52.pdf
5. *Pankhardt K.* Load-bearing glass structures [Electronic resource] / *K.Pankhardt // Periodica Polytechnica Civil Engineering*. – 2004. – Vol. 48, No. 1–2. – P. 157–172. – Retrieved from: https://dea.lib.unideb.hu/dea/bitstream/handle/2437/192250/file_up_590-4643-1-PB.pdf?sequence=1
6. *Родичев Ю.М.* Питання якості, міцності і безпеки вітчизняних виробів з зміцненого скла при проектуванні будівельних конструкцій [Електронний ресурс] / *Ю.М. Родичев // Семінар «Стан та шляхи вдосконалення застосування світлопрозорих конструкцій», 28 травня 2009 р., м.Київ. – Режим доступу: <https://fasadinfo.ua/articles/glass/1346>*
7. *Zammit K.* Increasing the design strength of glass – fractography and stress testing [Electronic resource] / *K. Zammit, M. Overend // Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Symposium, Valencia, Spain, 28 September – 2 October 2009*. – 12 p. – Retrieved from: <https://www.gft.eng.cam.ac.uk/media/kz/iass-2009-paper-zammit-overend.pdf>
8. Mechanical Behavior, Testing, and Manufacturing Properties of Materials [Electronic resource]. – Retrieved from: <https://www.researchgate.net/file.PostFileLoader.html?id=56bf443b6307d911188b4588&assetKey=AS%3A328682485895168%401455375419485>.
9. *Toshihiko O.* Fracture Analysis, a Basic Tool to Solve Breakage Issues [Electronic resource] / *O. Toshihiko // Technical Information Paper (TIP), Corning Inc.* – 2004. – Vol. 201. – Retrieved from: http://www.corning.com/media/worldwide/cdt/documents/2_TIP_201.pdf
10. *Nemeth N.N.* CARES/LIFE Ceramics Analysis and Reliability Evaluation of Structures Life Prediction Program (NASA/TM-2003-106316) [Electronic resource] / *N.N. Nemeth, L.M. Powers, L.A. Janosik, J.P. Gyekemesi. – NASA Glenn Research Center; Cleveland, OH United States, 2003*. – 342 p. – Retrieved from: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20030014949.pdf>
11. *Evans A.G.* Crack Propagation and Failure Prediction in Silicon Nitride at Elevated Temperature / *A.G. Evans, S.M. Wiederhorn // J. of Mat. Sci.* – 1974. – Vol. 9. – P. 270-278.
12. *Evans A.G.* Proof Testing of Ceramic Materials-An Analytical Basis for Failure Prediction / *A.G. Evans, S.M. Wiederhorn // Int. J. of Fracture*. – 1974. – Vol. 10, No. 3. – P. 379-392
13. *Wiederhorn S.M.* Subcritical Crack Growth in Ceramics / *S.M. Wiederhorn // Fracture Mechanics of Ceramics* / Bradt, R.C., Hasselurau, D.P., Lang, F.F. (Eds.); Plenum, New York. – 1974. – P. 613-646.
14. *Wiederhorn S.M.* Reliability, Life Prediction, and Proof Testing of Ceramics / *S.M. Wiederhorn // Ceramics for High-Performance Applications* / Burke J.J., Gorum A.E., Katz, R.N. (Eds.); Brook Hill Publishing Co., MA. – 1974. – P.633- 663.
15. *Paris P.C.* A Critical Analysis of Crack Propagation Laws / *P.C. Paris, F.Erdogan // J. Basic Eng.*, Trans. ASME. – 1963. – Vol. 85, No. 4. – P.528-534.
16. *Walker K.* Effects of Environmental and Complex Load History on Fatigue Life / *K.Walker // ASTM STP 462, American Society for Testing and Materials*. – 1970. – P. 1-14.
17. *Dauskardt R.H.* Cyclic Fatigue Crack Propagation in MgPSZ Ceramics / *R.H. Dauskardt, D.B. Marshall, R.O. Ritchie // J. Am. Cer. Soc.* – 1990. – Vol. 73, No. 4. – P. 893-903.
18. *Осадчук Т.Ю.* Дослідження міцності багатошарових скляних плит, які працюють на згин від зосередженого навантаження штампом / *Т.Ю. Осадчук, Б.Г. Демчина // Будівельне виробництво: міжвідомчий науково-технічний збірник. – К.: НДІБВ, 2016. – № 60/2016. – С.58-63.*
19. *Осадчук Т.Ю.* Дослідження деформацій багатошарових скляних плит за допомогою кореляції цифрових зображень / *Т.Ю. Осадчук, Б.Г. Демчина // Науково-технічний збірник «Комунальне господарство міст». Серія: Технічні науки та архітектура. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017 – № 134. – С.153-163.*

20. Демчина Б.Г. Міцність та деформативність багатошарових скляних плит з різних типів скла, які працюють на згин / Б.Г. Демчина, Т.Ю. Осадчук, Х. Б. Демчина // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса: ОДАБА, 2017. – № 69. – С. 30 - 37.
21. *Wiederhorn S.* Strength of Glass - A Fracture Mechanics Approach (NBSIR 74-485) [Electronic resource] / *S. Wiederhorn* // Proceedings of Tenth International Congress on Glass, Kyoto, Japan, July 8-13, 1974. – 18 p. – Retrieved from: [https://www.gpo.gov/fdsys/pkg/GOVPUB-C13-584f4bac8792295896df0d41d93ac4ae.pdf](https://www.gpo.gov/fdsys/pkg/GOVPUB-C13-584f4bac8792295896df0d41d93ac4ae/pdf/GOVPUB-C13-584f4bac8792295896df0d41d93ac4ae.pdf)
22. *Nemeth N.N.* Durability evaluation of ceramic components using CARES/LIFE (NASA-TM-106475) [Electronic resource] / *N.N. Nemeth, L.M. Powers, L.A. Janosik, J.P. Gyekenyesi* // 39th International Gas Turbine and Aeroengine Congress, Hague, Netherlands, June 13-16, 1994. – 15 p. – Retrieved from: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19940020209.pdf>
23. WeibPar: Time Dependent Theory Guide - Dynamic Fatigue Parameter Estimation, Connecticut Reserve Technologies, Inc. [Electronic resource]. – Retrieved from: http://www.weibpar.com/support/docs/WeibPar_Time_Theory.PDF
24. *Viens M.J.* Fracture toughness and crack growth of Zerodur (NASA-TM-4185) [Electronic resource] / *M.J. Viens*. – NASA Technical Memorandum, 1990, Vol. 4185. – 30 p. – Retrieved from: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19900011871.pdf>
25. *Schreurs P.J.G.* Fracture Mechanics - Lecture notes: course 4A780, Concept version [Electronic resource] / *P.J.G. Schreurs*. – Eindhoven University of Technology, Department of Mechanical Engineering, Materials Technology, 2012. – Retrieved from: <http://www.mate.tue.nl/~piet/edu/frm/pdf/frmsyl1213.pdf>
26. *Falvo M.R.* Introduction to Materials Science (Appl 50) [Electronic resource] / *M.R. Falvo*. – Additional Topics, 2006. – Retrieved from: <https://users.physics.unc.edu/~falvo/Appl50/AdditionalCoverageofSelectedTopics.pdf>
27. *Wang C.H.* Introduction to Fracture Mechanics (DSTO-GD-0103) [Electronic resource] / *C.H. Wang*. – Airframes and Engines Division, Aeronautical and Maritime Research Laboratory, 1996. – 82 p. – Retrieved from: <http://dspace.dsto.defence.gov.au/dspace/bitstream/1947/3746/1/DSTO-GD-0103%20PR.pdf> (retrieved: 25.02.2018).
28. *Haldimann M.* Fracture strength of structural glass elements – analytical and numerical modelling, testing and design [Electronic resource]: Phd Thesis (Thèse N° 3671) / *M. Haldimann*; EPFL, Lausanne, Switzerland, 2006. – 202 p. – Retrieved from: https://infoscience.epfl.ch/record/89658/files/EPFL_TH3671.pdf
29. *Callister W.D.* Materials Science And Engineering: An Introduction (7th ed.) [Electronic resource] / *W.D. Callister*. – John Wiley & Sons, 2007. – 975 p. – Retrieved from: [http://user.ceng.metu.edu.tr/~el630912/Callister%20-%20Materials%20Science%20and%20Engineering%20-%20An%20Introduction%207e%20\(Wiley,%202007\).pdf](http://user.ceng.metu.edu.tr/~el630912/Callister%20-%20Materials%20Science%20and%20Engineering%20-%20An%20Introduction%207e%20(Wiley,%202007).pdf)
30. *Quinn G.D.* Fractography of ceramics and glasses [Electronic resource] / *G.D. Quinn*. – NIST Recommended Practice Guide, Special Publication (NIST SP) - 960-16e2, 2016. – Retrieved from: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/specialpublications/NIST.SP.960-16e2.pdf>
31. *Roylance D.* Introduction to Fracture Mechanics [Electronic resource] / *D. Roylance*. – Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, 2001. – Retrieved from: <http://web.mit.edu/course/3/3.11/www/modules/frac.pdf>
32. *McGinty B.* Stress Intensity Factor [Electronic resource] / *B. McGinty*. – Retrieved from: <http://www.fracturemechanics.org/sif.html>
33. *Sejnoha M.* Fracture mechanics [Electronic resource] / *M. Sejnoha*. – Czech Technical University, Faculty of Civil Engineering, Department of Structural Mechanics, 2004. – Retrieved from: http://ksm.fsv.cvut.cz/~sejnom/download/pm10_tisk.pdf
34. *Sørensen N.B.* Introduction to Fatigue and Fracture Mechanics [Electronic resource] / *N.B. Sørensen, L. Gansted-Mortensen*. – Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University. – Retrieved from: <http://vbn.aau.dk/files/37807757/Introduction%20to%20Fatigue%20and%20Fracture%20Mechanics.pdf>
35. *Ciccotti M.* Stress-Corrosion Mechanisms in Silicate Glasses [Electronic resource] / *M. Ciccotti* // Journal of Physics D Applied Physics. – 2009. – Vol. 42. – P. 1-34. – Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/23795997_Stress-Corrosion_Mechanisms_in_Silicate_Glasses
36. *Haldimann M.* Structural Use of Glass / *M. Haldimann, A. Luible, M. Overend*. – Structural Engineering Document SED, International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE), Zürich, Forthcoming, 2008. – 215 p.
37. Fundamentals of LEFM And Applications To Fatigue Crack Growth – eFatigue [Electronic resource]. – Retrieved from: https://www.efatigue.com/training/Chapter_6.pdf

38. *Doyle K.B.* Design strength of optical glass [Electronic resource] / *K.B. Doyle, M.A. Kahan* // Proceedings of SPIE 5176 Optomechanics, San Diego, California, 2003 / Ed. Hatheway A. E.; International Society for Optics and Photonics. – 2003. – P. 14-25. – Retrieved from: <https://wp.optics.arizona.edu/optomech/wp-content/uploads/sites/53/2016/10/doyle-2003.pdf>
39. *Santarsiero M.* Equivalent-Design Crack Model for Structural Glass Elements / *M. Santarsiero, M. Froli, C. Louter* // Journal of Structural Engineering. – 2014. – Vol. 140, No. 6. – 04014016 (10 p.).
40. *James N.* SCC and v-K Curve Theory [Electronic resource] / *N. James*. – Retrieved from: <https://www.fose1.plymouth.ac.uk/fatiguefracture/tutorials/FractureMechanics/SCC/SCCTheory1.htm>
41. *Brow R.K.* Lecture 10. Glass Science & Engineering Mechanical Properties [Electronic resource] / *R.K. Brow*. – Lehigh University. – Retrieved from: https://www.lehigh.edu/imi/teched/ChinaWS/Lecture_10_Brow_Glass-Fracture.pdf
42. *Brown B.F.* Stress Corrosion Cracking Control Measures [Electronic resource] / *B.F. Brown*. – National Bureau of Standards Monograph, Washington, D.C., 1977. – 156 p. – Retrieved from: <http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/MONO/nbsmonograph156.pdf>
43. *Cottis R.A.* Guides to Good Practice in Corrosion Control – Stress Corrosion Cracking / *R.A Cottis*. – The National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2000. – 16 p.
44. *Wiederhorn S.M.* Stress Corrosion and Static Fatigue of Glass / *S.M. Wiederhorn, L.H. Bolz* // J. Am. Ceram. Soc. – 1970. – Vol. 53, No. 10. – P. 543–548.
45. *Michalske T.A.* Fractography of Stress Corrosion Cracking in Glass / *T.A. Michalske* // Fractography of Glass / R.C. Bradt and R.E. Tresseler (Eds.); Plenum Press, New York. – 1994. – P. 111-142.
46. *Freiman S.W.* Stress corrosion of ceramic materials. Annual Report [Electronic resource] / *S.W. Freiman, B.R. Lawn, G.S. White, A.C. Gonzalez, Cook R.F., P. Chantikul, H. Richter, E.R. Fuller Jr., S.M. Wiederhorn, T.A. Michalske*. – National Bureau of Standards, Inorganic Materials Division, Washington, 1983. – 159 p. – Retrieved from: <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a136729.pdf>
47. *Rountree C.* Recent progress to understand stress corrosion cracking in sodium borosilicate glasses: Linking the chemical composition to structural, physical and fracture properties / *C. Rountree* // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2017. – Vol. 50. – 343002 (34 p.).
48. *Mecholsky J.* Virtual Course on Glass - The Properties of Glass: Mechanical Properties of Glass - Lecture 12 [Electronic resource] / *J. Mecholsky*. – Retrieved from: https://www.lehigh.edu/imi/teched/GlassProp/Slides/GlassProp_Lecture12_Mecholsky.pdf
49. CNR-DT 210/2013. Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Costruzioni con Elementi Strutturali di Vetro (Guidelines for the Design and Construction of building with Structural Elements of Glass). Italian National Research Council (CNR), Rome, Italy, 2013. – 360 p.
50. *Overend M.* A computer algorithm for determining the tensile strength of float glass [Electronic resource] / *M. Overend, K. Zammit* // Engineering structures. – 2012. – Vol. 45. – P. 68-77. – Retrieved from: http://www-g.eng.cam.ac.uk/gft/media/PG%20projects/Mauro%27s%20publication/Overend%20&%20Zammit_2012_final%20draft.pdf
51. *Overend M.* Recent developments in design methods for glass structures [Electronic resource] / *M. Overend* // The Structural Engineer. – 2010. – Vol. 88, No. 14. – P. 18-26. – Retrieved from: <https://www.gft.eng.cam.ac.uk/media/mo/se14-paper-dev-of-design-methods-of-glass.pdf>
52. *Scholze H.* Glass: Nature, Structure, and Properties / *H. Scholze*. – Springer Science & Business Media, 2012. – 454 p.
53. *Lindqvist M.* Structural glass strength prediction based on edge flaw characterization [Electronic resource]: PhD Thesis (Thèse N° 5627) / *M. Lindqvist*; EPFL, Lausanne, Switzerland, 2013. – 199 p. – Retrieved from: https://infoscience.epfl.ch/record/183860/files/EPFL_TH5627.pdf
54. *Bach P.W.* Subcritical Crack Growth of Wesgo A1-995 Alumina at Room Temperature [Electronic resource] / *P.W. Bach, B.J. De Smet*. – Netherlands Energy Research Foundation ECN, 1992. – 30 p. – Retrieved from: <ftp://ftp.ecn.nl/pub/www/library/report/1996/c96026.pdf>
55. *Bach P.W.* Subcritical crack growth of wesgo a1-995 alumina at 1000°C [Electronic resource] / *P.W. Bach*. – Netherlands Energy Research Foundation ECN, 1993. – 33 p. – Retrieved from: <https://www.ecn.nl/publicaties/PdfFetch.aspx?nr=ECN-I--93-011>
56. *Overend M.* Diagnostic Interpretation of Glass Failure [Electronic resource] / *M. Overend, S. De Gaetano, M. Haldimann* // Structural Engineering International. – 2007. – Vol. 17. – P. 151-158. – Retrieved from: http://www-g.eng.cam.ac.uk/gft/media/PG%20projects/Mauro%27s%20publication/Diagnostic_Interpretation_of_Glass_Failure_DRAFT.pdf
57. *Wiederhorn S.M.* Fracture surface energy of glass / *S.M. Wiederhorn* // J. Am. Ceram. Soc. – 1969. – Vol. 52. – P. 99-105.

58. *Mecholsky J.* Quantitative Fractographic Analysis of Fracture Origins in Glass / *J. Mecholsky* // Fractography of Glass / R.C. Bradt and R.E. Tresseler (Eds.); Plenum Press, New York. – 1994. – P. 37-73.
59. *Van der Velde O.* Finding the strength of glass: A mechanical and fractographic research of glass biaxial strength for structural purposes [Electronic resource]: master thesis / *O. Van der Velde*; Delft University of Technology, 2015. – 134 p. – Retrieved from: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:386244db-87e6-433c-9072-038d77443c4c/datastream/OBJ/download>
60. *Glaesemann G.S.* Optical Fiber Mechanical Reliability [Electronic resource] / *G.S. Glaesemann*. – Corning Inc., 2017. – Retrieved from: https://www.corning.com/media/worldwide/coc/documents/Fiber/RC-%20White%20Papers/WP-General/WP8002_7.17.pdf
61. *Schula S.* Fracture strength of glass, engineering testing methods and estimation of characteristic values / *S. Schula, J. Schneider, M. Vandebroek, J. Belis* // COST Action TU0905, Mid-term Conference on Structural Glass, Proceedings. – 2013. – P.223-234
62. *Veer F. A.* The relation between pre-stress and failure stress in tempered glass / *F.A. Veer, Y.M. Rodichev* // Challenging Glass 4: Structural Glass-Novel design methods and next generation products / C. Louter, F. Bos, J. Belis, J.P. Lebet (Eds.); Abingdon: Taylor & Francis Group. – 2014. – P. 731-738.
63. *Dodd G.* Glass Engineering without the Concept of Stress [Electronic resource] / *G. Dodd* // Glass Processing Days, 18–21 June, 2001. – P. 120-15. – Retrieved from: https://www.nikolas.net/sites/default/files/press_files/pariser_platz_3_arup_research_and_development_report_june2001_100727_110425.pdf
64. *Ungureanu V.* Advanced design of glass structures – Lecture L2: Glass strengthening methods [Electronic resource] / *V. Ungureanu*. – Retrieved from: http://www.ct.upt.ro/suscos/files/2013-2015/1E05/2E5_Glass_structures_L2_2014_VU.pdf
65. *Overend M.* The appraisal of structural glass assemblies [Electronic resource]: PhD Thesis / *M. Overend*; University of Surrey, 2002. – 214 p. – Retrieved from: <http://eprints.surrey.ac.uk/804385/1/Overend2002.pdf>
66. *Mould R.E.* The Strength of Inorganic Glasses / *R.E. Mould* // Fundamental Phenomena in the Material Sciences, Vol. 4: Fracture of Metals, Polymers, and Glasses / Bonis L. J., Duga J. J., Gilman, J. J. (Eds); Proceedings of the Fourth Symposium on Fundamental Phenomena in the Materials Sciences, Plenum Press, New York. – 1967. – P. 119-149.
67. *Personick S.D.* Fiber Optics: Technology and Applications / *S.D. Personick*. – Springer Science & Business Media, 2013. – 258 p.

REFERENCES

1. New Developments in Load-Bearing Glass [Electronic resource]. – Retrieved from: <https://www.bdcuniversity.com/new-developments-load-bearing-glass>.
2. *Achintha M.* Sustainability of glass in construction [Electronic resource] / *M.Achintha* // Sustainability of Construction Materials / Ed. J. Khatib; Woodhead Publishing. – 2016. – P. 79-104. – Retrieved from: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100370-1.00005-6>
3. *Kalamar R.* Load Bearing Innovative Construction from Glass [Electronic resource] / *R. Kalamar, M. Eliášová* // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2015. – Vol. 96. – 012066 (7 p.). – Retrieved from: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/96/1/012066>
4. *Šāble L.* Evaluation of Glass in Design of Load Bearing Structures [Electronic resource] / *L. Šāble, K. Kalnins* // Proceedings of Civil Engineering '13: 4th International Scientific Conference, Latvia, Jelgava, 16-17 May, 2013. – P.46-52. – Retrieved from: http://lufb.llu.lv/conference/Civil_engineering/2013/partI/Latvia_CivilEngineering2013Vol4PartI_46-52.pdf
5. *Pankhardt K.* Load-bearing glass structures [Electronic resource] / *K.Pankhardt* // Periodica Polytechnica Civil Engineering. – 2004. – Vol. 48, No. 1–2. – P. 157–172. – Retrieved from: https://dea.lib.unideb.hu/dea/bitstream/handle/2437/192250/file_up_590-4643-1-PB.pdf?sequence=1
6. *Rodichev Y.M.* Pytannia yakosti, mitsnosti i bezpeky vitchyznyanykh vyrobiv z zmitsnenoho skla pry proektuvanni budivelnnykh konstruktssii (Issues of quality, strength and safety of domestic products from strengthened glass in the design of building structures) [Electronic resource] / *Y.M. Rodichev* // Seminar «Stan ta shliakhy vdoskonalennia zastosuvannia svitloprozorykh konstruktssii», 28 travnia 2009 r., m.Kyiv. – Retrieved from: <https://fasadinfo.ua/articles/glass/1346>
7. *Zammit K.* Increasing the design strength of glass – fractography and stress testing [Electronic resource] / *K. Zammit, M. Overend* // Proceedings of the International Association for Shell and

- Spatial Structures Symposium, Valencia, Spain, 28 September – 2 October 2009. – 12 p. – Retrieved from: <https://www.gft.eng.cam.ac.uk/media/kz/iass-2009-paper-zammit-overend.pdf>
8. Mechanical Behavior, Testing, and Manufacturing Properties of Materials [Electronic resource]. – Retrieved from: <https://www.researchgate.net/file.PostFileLoader.html?id=56bf443b6307d911188b4588&assetKey=AS%3A328682485895168%401455375419485>
 9. *Toshihiko O.* Fracture Analysis, a Basic Tool to Solve Breakage Issues [Electronic resource] / *O.Toshihiko* // Technical Information Paper (TIP), Corning Inc. – 2004. – Vol. 201. – Retrieved from: http://www.corning.com/media/worldwide/cdt/documents/2_TIP_201.pdf
 10. *Nemeth N.N.* CARES/LIFE Ceramics Analysis and Reliability Evaluation of Structures Life Prediction Program (NASA/TM-2003-106316) [Electronic resource] / *N.N. Nemeth, L.M. Powers, L.A. Janosik, J.P. Gyekenyesi.* – NASA Glenn Research Center; Cleveland, OH United States, 2003. – 342 p. – Retrieved from: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20030014949.pdf>
 11. *Evans A.G.* Crack Propagation and Failure Prediction in Silicon Nitride at Elevated Temperature / *A.G. Evans, S.M. Wiederhorn* // *J. of Mat. Sci.* – 1974. – Vol. 9. – P. 270-278.
 12. *Evans A.G.* Proof Testing of Ceramic Materials-An Analytical Basis for Failure Prediction / *A.G. Evans, S.M. Wiederhorn* // *Int. J. of Fracture.* – 1974. – Vol. 10, No. 3. – P. 379-392
 13. *Wiederhorn S.M.* Subcritical Crack Growth in Ceramics / *S.M. Wiederhorn* // *Fracture Mechanics of Ceramics* / Bradt, R.C., Hasselurau, D.P., Lang, F.F. (Eds.); Plenum, New York. – 1974. – P. 613-646.
 14. *Wiederhorn S.M.* Reliability, Life Prediction, and Proof Testing of Ceramics / *S.M. Wiederhorn* // *Ceramics for High-Performance Applications* / Burke J.J., Gorum A.E., Katz, R.N. (Eds.); Brook Hill Publishing Co., MA. – 1974. – P.633- 663.
 15. *Paris P.C.* A Critical Analysis of Crack Propagation Laws / *P.C. Paris, F.Erdogan* // *J. Basic Eng.*, Trans. ASME. – 1963. – Vol. 85, No. 4. – P.528-534.
 16. *Walker K.* Effects of Environmental and Complex Load History on Fatigue Life / *K.Walker* // ASTM STP 462, American Society for Testing and Materials. – 1970. – P. 1-14.
 17. *Dauskardt R.H.* Cyclic Fatigue Crack Propagation in MgPSZ Ceramics / *R.H. Dauskardt, D.B. Marshall, R.O. Ritchie* // *J. Am. Cer. Soc.* – 1990. – Vol. 73, No. 4. – P. 893-903.
 18. *Osadchuk T.* Doslidzhennia mitsnosti bahatosharovykh sklianykh plyt, yaki pratsiuut na zghyn vid zoseredzhenoho navantazhennia shtampom (Experimental researches of multilayered glass plates which working on bending under stamp loading on the local area) [Electronic resource] / *T. Osadchuk, B.Demchyna* // *Budivnelne vyrobnytstvo: mizhvidomchyi naukovy–tekhnichnyi zbirnyk.* – K.: NDIBV, 2016. – № 60/2016. – P.58-63. – Retrieved from: <https://ndibv.kiev.ua/wp-content/uploads/2016/06/Osadchuk.pdf>
 19. *Osadchuk T.* Doslidzhennia deformatsii bahato sharovykh sklianykh plyt za dopomohoiu koreliatsii tsyfrovyykh zobrazhen (Strain measurement of laminated glass plates using digital image correlation) [Electronic resource] / *T. Osadchuk, B. Demchyna* // *Naukovy–tekhnichnyi zbirnyk «Komunalne hospodarstvo mist».* Serii: Tekhnichni nauky ta arkhitektura. – Kharkiv: KhNUMH im. O.M. Beketova, 2017. – № 134. – P.153-163. – Retrieved from: <http://eprints.kname.edu.ua/46097/1/5013-9958-1-SM.pdf>
 20. *Demchyna B.* Mitsnist ta deformatyvnist bahatosharovykh sklianykh plyt z riznykh typiv skla, yaki pratsiuut na zghyn [Electronic resource] / *B. Demchyna, T. Osadchuk, Kh. Demchyna* // *Visnyk Odeskoi derzhavnoi akademii budivnytstva ta arkhitektury.* – Odesa: ODABA, 2017. – № 69. – P. 30 - 37. – Retrieved from: <http://www.ogasa.org.ua/visnik-archive.html>
 21. *Wiederhorn S.* Strength of Glass - A Fracture Mechanics Approach (NBSIR 74-485) [Electronic resource] / *S. Wiederhorn* // *Proceedings of Tenth International Congress on Glass, Kyoto, Japan, July 8-13, 1974.* – 18 p. – Retrieved from: <https://www.gpo.gov/fdsys/pkg/GOVPUB-C13-584f4bac8f792295896df0d41d93ac4ae/pdf/GOVPUB-C13-584f4bac8f792295896df0d41d93ac4ae.pdf>
 22. *Nemeth N.N.* Durability evaluation of ceramic components using CARES/LIFE (NASA-TM-106475) [Electronic resource] / *N.N. Nemeth, L.M. Powers, L.A. Janosik, J.P. Gyekenyesi* // *39th International Gas Turbine and Aeroengine Congress, Hague, Netherlands, June 13-16, 1994.* – 15 p. – Retrieved from: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19940020209.pdf>
 23. *WeibPar: Time Dependent Theory Guide - Dynamic Fatigue Parameter Estimation, Connecticut Reserve Technologies, Inc.* [Electronic resource]. – Retrieved from: http://www.weibpar.com/support/docs/WeibPar_Time_Theory.PDF
 24. *Viens M.J.* Fracture toughness and crack growth of Zerodur (NASA-TM-4185) [Electronic resource] / *M.J. Viens.* – NASA Technical Memorandum, 1990, Vol. 4185. – 30 p. – Retrieved from: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19900011871.pdf>
 25. *Schreurs P.J.G.* Fracture Mechanics - Lecture notes: course 4A780, Concept version [Electronic resource] / *P.J.G. Schreurs.* – Eindhoven University of Technology, Department of Mechanical Engineering, Materials Technology, 2012. – Retrieved from: <http://www.mate.tue.nl/~piet/edu/frm/pdf/frmsyl1213.pdf>

26. *Falvo M.R.* Introduction to Materials Science (Appl 50) [Electronic resource] / *M.R. Falvo.* – Additional Topics, 2006. – Retrieved from: <https://users.physics.unc.edu/~falvo/Appl50/AdditionalCoverageofSelectedTopics.pdf>
27. *Wang C.H.* Introduction to Fracture Mechanics (DSTO-GD-0103) [Electronic resource] / *C.H. Wang.* – Airframes and Engines Division, Aeronautical and Maritime Research Laboratory, 1996. – 82 p. – Retrieved from: <http://dspace.dsto.defence.gov.au/dspace/bitstream/1947/3746/1/DSTO-GD-0103%20PR.pdf> (retrieved: 25.02.2018).
28. *Haldimann M.* Fracture strength of structural glass elements – analytical and numerical modelling, testing and design [Electronic resource]: PhD Thesis (Thèse N° 3671) / *M. Haldimann*; EPFL, Lausanne, Switzerland, 2006. – 202 p. – Retrieved from: https://infoscience.epfl.ch/record/89658/files/EPFL_TH3671.pdf
29. *Callister W.D.* Materials Science And Engineering: An Introduction (7th ed.) [Electronic resource] / *W.D. Callister.* – John Wiley & Sons, 2007. – 975 p. – Retrieved from: [http://user.ceng.metu.edu.tr/~e1630912/Callister%20-%20Materials%20Science%20and%20Engineering%20-%20An%20Introduction%207e%20\(Wiley,%202007\).pdf](http://user.ceng.metu.edu.tr/~e1630912/Callister%20-%20Materials%20Science%20and%20Engineering%20-%20An%20Introduction%207e%20(Wiley,%202007).pdf)
30. *Quinn G.D.* Fractography of ceramics and glasses [Electronic resource] / *G.D. Quinn.* – NIST Recommended Practice Guide, Special Publication (NIST SP) - 960-16e2, 2016. – Retrieved from: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/specialpublications/NIST.SP.960-16e2.pdf>
31. *Roylance D.* Introduction to Fracture Mechanics [Electronic resource] / *D. Roylance.* – Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, 2001. – Retrieved from: <http://web.mit.edu/course/3/3.11/www/modules/frac.pdf>
32. *McGinty B.* Stress Intensity Factor [Electronic resource] / *B. McGinty.* – Retrieved from: <http://www.fracturemechanics.org/sif.html>
33. *Sejnoha M.* Fracture mechanics [Electronic resource] / *M. Sejnoha.* – Czech Technical University, Faculty of Civil Engineering, Department of Structural Mechanics, 2004. – Retrieved from: http://ksm.fsv.cvut.cz/~sejnom/download/pm10_tisk.pdf
34. *Sørensen N.B.* Introduction to Fatigue and Fracture Mechanics [Electronic resource] / *N.B. Sørensen, L. Gansted-Mortensen.* – Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University. – Retrieved from: <http://vbn.aau.dk/files/37807757/Introduction%20to%20Fatigue%20and%20Fracture%20Mechanics.pdf>
35. *Ciccotti M.* Stress-Corrosion Mechanisms in Silicate Glasses [Electronic resource] / *M. Ciccotti* // Journal of Physics D Applied Physics. – 2009. – Vol. 42. – P. 1-34. – Retrieved from: <https://www.researchgate.net/publication/23795997> Stress-Corrosion Mechanisms in Silicate Glasses
36. *Haldimann M.* Structural Use of Glass / *M. Haldimann, A. Luble, M. Overend.* – Structural Engineering Document SED, International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE), Zürich, Forthcoming, 2008. – 215 p.
37. Fundamentals of LEFM And Applications To Fatigue Crack Growth – eFatigue [Electronic resource]. – Retrieved from: https://www.efatigue.com/training/Chapter_6.pdf
38. *Doyle K.B.* Design strength of optical glass [Electronic resource] / *K.B. Doyle, M.A. Kahan* // Proceedings of SPIE 5176 Optomechanics, San Diego, California, 2003 / Ed. Hatheway A. E.; International Society for Optics and Photonics. – 2003. – P. 14-25. – Retrieved from: <https://wp.optics.arizona.edu/optomech/wp-content/uploads/sites/53/2016/10/doyle-2003.pdf>
39. *Santarsiero M.* Equivalent-Design Crack Model for Structural Glass Elements / *M. Santarsiero, M. Froli, C. Louter* // Journal of Structural Engineering. – 2014. – Vol. 140, No. 6. – 04014016 (10 p.).
40. *James N.* SCC and v-K Curve Theory [Electronic resource] / *N. James.* – Retrieved from: <https://www.fose1.plymouth.ac.uk/fatiguefracture/tutorials/FractureMechanics/SCC/SCCTheory1.htm>
41. *Brow R.K.* Lecture 10. Glass Science & Engineering Mechanical Properties [Electronic resource] / *R.K. Brow.* – Lehigh University. – Retrieved from: https://www.lehigh.edu/imi/teched/ChinaWS/Lecture_10_Brow_Glass-Fracture.pdf
42. *Brown B.F.* Stress Corrosion Cracking Control Measures [Electronic resource] / *B.F. Brown.* – National Bureau of Standards Monograph, Washington, D.C., 1977. – 156 p. – Retrieved from: <http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/MONO/nbsmonograph156.pdf>
43. *Cottis R.A.* Guides to Good Practice in Corrosion Control – Stress Corrosion Cracking / *R.A. Cottis.* – The National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2000. – 16 p.
44. *Wiederhorn S.M.* Stress Corrosion and Static Fatigue of Glass / *S.M. Wiederhorn, L.H. Bolz* // J. Am. Ceram. Soc. – 1970. – Vol. 53, No. 10. – P. 543–548.
45. *Michalske T.A.* Fractography of Stress Corrosion Cracking in Glass / *T.A. Michalske* // Fractography of Glass / R.C. Bradt and R.E. Tresseler (Eds.); Plenum Press, New York. – 1994. – P. 111-142.
46. *Freiman S.W.* Stress corrosion of ceramic materials. Annual Report [Electronic resource] / *S.W. Freiman, B.R. Lawn, G.S. White, A.C. Gonzalez, Cook R.F., P. Chantikul, H. Richter, E.R. Fuller Jr., S.M. Wiederhorn, T.A. Michalske.* – National Bureau of Standards, Inorganic Materials

- Division, Washington, 1983. – 159 p. – Retrieved from: <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a136729.pdf>
47. *Rountree C.* Recent progress to understand stress corrosion cracking in sodium borosilicate glasses: Linking the chemical composition to structural, physical and fracture properties / *C. Rountree* // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2017. – Vol. 50. – 343002 (34 p.).
 48. *Mecholsky J.* Virtual Course on Glass - The Properties of Glass: Mechanical Properties of Glass - Lecture 12 [Electronic resource] / *J. Mecholsky*. – Retrieved from: https://www.lehigh.edu/imi/teched/GlassProp/Slides/GlassProp_Lecture12_Mecholsky.pdf
 49. CNR-DT 210/2013. Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Costruzioni con Elementi Strutturali di Vetro (Guidelines for the Design and Construction of building with Structural Elements of Glass). Italian National Research Council (CNR), Rome, Italy, 2013. – 360 p.
 50. *Overend M.* A computer algorithm for determining the tensile strength of float glass [Electronic resource] / *M. Overend, K. Zammit* // Engineering structures. – 2012. – Vol. 45. – P. 68-77. – Retrieved from: http://www-g.eng.cam.ac.uk/gft/media/Pg%20projects/Mauro%27s%20publication/Overend%20&%20Zammit_2012_final%20draft.pdf
 51. *Overend M.* Recent developments in design methods for glass structures [Electronic resource] / *M. Overend* // The Structural Engineer. – 2010. – Vol. 88, No. 14. – P. 18-26. – Retrieved from: <https://www.gft.eng.cam.ac.uk/media/mo/se14-paper-dev-of-design-methods-of-glass.pdf>
 52. *Scholze H.* Glass: Nature, Structure, and Properties / *H. Scholze*. – Springer Science & Business Media, 2012. – 454 p.
 53. *Lindqvist M.* Structural glass strength prediction based on edge flaw characterization [Electronic resource]: PhD Thesis (Thèse N° 5627) / *M. Lindqvist*; EPFL, Lausanne, Switzerland, 2013. – 199 p. – Retrieved from: https://infoscience.epfl.ch/record/183860/files/EPFL_TH5627.pdf
 54. *Bach P.W.* Subcritical Crack Growth of Wsogo A1-995 Alumina at Room Temperature [Electronic resource] / *P.W. Bach, B.J. De Smet*. – Netherlands Energy Research Foundation ECN, 1992. – 30 p. – Retrieved from: <ftp://ftp.ecn.nl/pub/www/library/report/1996/c96026.pdf>
 55. *Bach P.W.* Subcritical crack growth of wsgo a1-995 alumina at 1000°C [Electronic resource] / *P.W. Bach*. – Netherlands Energy Research Foundation ECN, 1993. – 33 p. – Retrieved from: <https://www.ecn.nl/publicaties/PdfFetch.aspx?nr=ECN-I--93-011>
 56. *Overend M.* Diagnostic Interpretation of Glass Failure [Electronic resource] / *M. Overend, S. De Gaetano, M. Haldimann* // Structural Engineering International. – 2007. – Vol. 17. – P. 151-158. – Retrieved from: http://www-g.eng.cam.ac.uk/gft/media/Pg%20projects/Mauro%27s%20publication/Diagnostic_Interpretation_of_Glass_Failure_DRAFT.pdf
 57. *Wiederhorn S.M.* Fracture surface energy of glass / *S.M. Wiederhorn* // *J. Am. Ceram. Soc.* – 1969. – Vol. 52. – P. 99-105.
 58. *Mecholsky J.* Quantitative Fractographic Analysis of Fracture Origins in Glass / *J. Mecholsky* // Fractography of Glass / *R.C. Bradt and R.E. Tresseler* (Eds.); Plenum Press, New York. – 1994. – P. 37-73.
 59. *Van der Velde O.* Finding the strength of glass: A mechanical and fractographic research of glass biaxial strength for structural purposes [Electronic resource]: master thesis / *O. Van der Velde*; Delft University of Technology, 2015. – 134 p. – Retrieved from: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:386244db-87e6-433c-9072-038d77443c4c/datastream/OBJ/download>
 60. *Glaesemann G.S.* Optical Fiber Mechanical Reliability [Electronic resource] / *G.S. Glaesemann*. – Corning Inc., 2017. – Retrieved from: https://www.corning.com/media/worldwide/coc/documents/Fiber/RC-%20White%20Papers/WP-General/WP8002_7.17.pdf
 61. *Schula S.* Fracture strength of glass, engineering testing methods and estimation of characteristic values / *S. Schula, J. Schneider, M. Vandebroek, J. Belis* // COST Action TU0905, Mid-term Conference on Structural Glass, Proceedings. – 2013. – P.223-234
 62. *Veer F. A.* The relation between pre-stress and failure stress in tempered glass / *F.A. Veer, Y.M. Rodichev* // Challenging Glass 4: Structural Glass-Novel design methods and next generation products / *C. Louter, F. Bos, J. Belis, J.P. Lebet* (Eds.); Abingdon: Taylor & Francis Group. – 2014. – P. 731-738.
 63. *Dodd G.* Glass Engineering without the Concept of Stress [Electronic resource] / *G. Dodd* // Glass Processing Days, 18–21 June, 2001. – P. 120-15. – Retrieved from: https://www.nikolas.net/sites/default/files/press_files/pariser_platz_3_arup_research_and_development_report_june2001_100727_110425.pdf
 64. *Ungureanu V.* Advanced design of glass structures – Lecture L2: Glass strengthening methods [Electronic resource] / *V. Ungureanu*. – Retrieved from: http://www.ct.upt.ro/suscos/files/2013-2015/1E05/2E5_Glass_structures_L2_2014_VU.pdf
 65. *Overend M.* The appraisal of structural glass assemblies [Electronic resource]: PhD Thesis / *M. Overend*; University of Surrey, 2002. – 214 p. – Retrieved from: <http://epubs.surrey.ac.uk/804385/1/Overend2002.pdf>

66. *Mould R.E.* The Strength of Inorganic Glasses / *R.E. Mould* // Fundamental Phenomena in the Material Sciences, Vol. 4: Fracture of Metals, Polymers, and Glasses / Bonis L. J., Duga J. J., Gilman, J. J. (Eds); Proceedings of the Fourth Symposium on Fundamental Phenomena in the Materials Sciences, Plenum Press, New York. – 1967. – P. 119-149.
67. *Personick S.D.* Fiber Optics: Technology and Applications / *S.D. Personick*. – Springer Science & Business Media, 2013. – 258 p.

Стаття надійшла 11.05.2018

Demchyna B., Osadchuk T.

DETERMINATION OF GLASS STRENGTH AND TIME-TO-FAILURE USING LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS

Traditionally glass is an aesthetic material not for load bearing purposes. The strength of glass is dependent on stress distribution, load duration, surface condition, and environmental conditions. Surface defects (flaws) or cracks are coupled with the inherent brittleness of glass. Brittle failure of glass is catastrophic failure mode when surface defects or cracks rapidly propagate under tensile loads to a critical value. This can be modelled using linear elastic fracture mechanics (LEFM). Elastic stress intensity near the crack tip is described by a stress intensity factor K_I . Analytical methods for characterizing the strength properties of glass are: estimating fracture toughness K_{IC} or inert strength σ_{IC} and lifetime t_f prediction for fatigue loading. Using these design approaches based on LEFM can give obtain the load bearing capacity of glass constructions.

Keywords: glass strength, flaws, scratches, cracks, stress corrosion, subcritical crack growth (SCG), linear elastic fracture mechanics (LEFM), stress intensity factor, static fatigue, power law, reliability, lifetime prediction, failure time (time-to-failure).

Демчина Б.Г., Осадчук Т.Ю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ СТЕКЛА НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Традиционно стекло является эстетическим материалом, не предназначенным для несущих целей. Прочность стекла зависит от распределения напряжений, продолжительности нагрузки, состояния поверхности и условий окружающей среды. Поверхностные дефекты или трещины связаны с характерной хрупкостью стекла. Хрупкое разрушение стекла - это катастрофический режим отказа, при котором поверхностные дефекты или трещины быстро распространяются под нагрузкой на растяжение до критического значения. Это можно смоделировать с помощью линейно-упругой механики разрушения (ЛПМР). Интенсивность упругих напряжений вблизи конца трещины описывается коэффициентом интенсивности напряжений K_I . Аналитическими методами определения прочностных свойств стекла являются: оценка вязкости разрушения K_{IC} или инертной прочности σ_{IC} и прогнозирования продолжительности эксплуатации (времени разрушения) t_f от усталости. Использование таких расчетных подходов на основе ЛПМР позволяет получить несущую способность конструкций из стекла.

Ключевые слова: прочность стекла, дефекты (недостатки), царапины, стресс-коррозия (коррозия под напряжениями), докритический рост трещины (ДЗТ), линейно-упругая механика разрушения (ЛПМР), коэффициент интенсивности напряжений, статическая усталость, силовой закон, надежность, прогнозирования долговечности, время разрушения
УДК 624.012.6+691.615

Демчина Б.Г., Осадчук Т.Ю. **Визначення міцності та довговічності скла на основі лінійно-пружної механіки руйнування** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 40-58.

Розглянуто визначення міцності та часу руйнування скла з використанням підходів лінійно-пружної механіки руйнування.

Табл. 1. Іл. 3. Бібліогр. 67 назв.

Demchyna B., Osadchuk T. **Determination of glass strength and time-to-failure using linear elastic fracture mechanics** / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 40-58. – Ukr.

The determination of glass strength and time-to-failure using the approaches of linear-elastic fracture mechanics is considered.

Tabl. 1. Fig. 3. Ref. 67

Демчина Б.Г., Осадчук Т.Ю. **Определение прочности и долговечности стекла на основе линейно-упругой механики разрушения** / Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. – Вип. 100. – С. 40-58. – Укр.

Рассмотрено определение прочности и времени разрушения стекла с использованием подходов линейно-упругой механики разрушения.

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр. 67 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, професор кафедри «Будівельні конструкції і мости» Національного університету «Львівська політехніка» ДЕМЧИНА Богдан Григорович

Адреса робоча: 79000 Україна, м. Львів, вул. Карпінського 6, Національний університет «Львівська політехніка», Кафедра будівельних конструкцій та мостів (2-й н.к., кім. 208), ДЕМЧИНІ Богдану Григоровичу

Робочий тел.: +38(032) 258-25-24

Мобільний тел.: +38(067)371-01-59

E-mail: bogdan195809@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4914-6348>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): аспірант, аспірант кафедри «Будівельні конструкції і мости» Національного університету «Львівська політехніка» ОСАДЧУК Тарас Юрійович

Адреса робоча: 79000 Україна, м. Львів, вул. Карпінського 6, Національний університет «Львівська політехніка», Кафедра будівельних конструкцій та мостів (2-й н.к., кім. 208), ОСАДЧУКУ Тарасу Юрійовичу

Робочий тел.: +38(032) 258-25-24

Мобільний тел.: +38(096)463-29-02

E-mail: osadchuktaras92@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-8686-7056>

УДК 539.3

ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ МАСИВІВ З УРАХУВАННЯМ ВИПАДКОВОГО ХАРАКТЕРУ КОНСТАНТ МАТЕРІАЛУ

Ю.В. Ворона,
канд. техн. наук

І.Д. Кара

В.І. Щербій

*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Повітрофлотський проспект., 31, м. Київ. 03680*

Для дослідження за методом граничних елементів усталених гармонічних коливань пружних масивних елементів конструкцій розробляється чисельна методика, яка враховує випадковий характер фізико-механічних параметрів матеріалу. Відхилення випадкових величин від їхніх середніх значень вважається малим параметром, за яким виконується розвинення невідомих щільностей і ядер інтегральних рівнянь. Отримана система граничних інтегральних рівнянь, послідовне розв'язання яких дозволяє визначити статистичні характеристики невідомих. Для обчислення сингулярних частин інтегралів від фундаментальних розв'язків та їхніх похідних запропоновані наближені вирази, особливості яких не перевищують особливості ядер задачі статички.

Ключові слова: граничні інтегральні рівняння, фундаментальний розв'язок, випадкові величини, малий параметр.

Метод граничних елементів (МГЕ) набув широкого розповсюдження як основа для створення засобів, спрямованих на чисельне розв'язання задач, що виникають в різних галузях техніки [1]-[3]. В той же час питання, які стосуються урахування випадкового характеру багатьох параметрів, що використовуються при розрахунку за МГЕ конструкцій та їхніх елементів, в літературі висвітлені з недостатньою повнотою. Чисельній реалізації МГЕ для дослідження статичного деформування пружних об'єктів присвячена робота [4]. В роботі [5] за допомогою МГЕ розв'язується задача про розсіювання акустичної хвилі на жорсткій сферичній перешкоді. При цьому випадковими величинами вважались довжина падаючої хвилі та густина середовища.

В даній статті наводяться результати роботи по створенню ефективної чисельної методики для дослідження вимушених усталених коливань пружних тривимірних об'єктів складної форми. Вважається, що константи матеріалу Ламе λ і μ є випадковими величинами. В якості алгоритмічної основи обчислювального процесу використовується граничний аналог формули Соміліана для амплітуд переміщень, які виникають при гармонічних коливаннях:

$$\frac{1}{2}u_j(\vec{x}, \omega) = \int_{\Gamma} \tau_k(\vec{y}, \omega) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_k(\vec{y}, \omega) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y, \quad j, k = 1, 3, \quad (1)$$

де $u_j(\vec{x}, \omega)$ – j -а компонента комплексної амплітуди коливань з круговою частотою ω ; $\vec{x} \{x_1, x_2, x_3\}$, $\vec{y} \{y_1, y_2, y_3\} \in \Gamma$; Γ – границя області V ;

$\tau_j(\bar{y}, \omega) = \lambda n_j(\bar{y}) \frac{\partial u_m(\bar{y}, \omega)}{\partial x_m} + \mu \left(\frac{\partial u_j(\bar{y}, \omega)}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k(\bar{y}, \omega)}{\partial y_j} \right) n_k(\bar{y})$ – компоненти комп-

лексної амплітуди напружень на площинці з нормаллю $\bar{n}\{n_1, n_2\}$; $U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$ – фундаментальний розв'язок задачі (амплітуди переміщень в пружному двовимірному просторі від дії зосередженої сили, одиничної амплітуди, яка прикладена в точці \bar{x} в напрямку осі θx_j) [2]:

$$U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\delta_{jk} U_0(r, \omega) - r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega) \right]; \quad (2)$$

$$U_0(r, \omega) = \frac{e^{\xi_2 r}}{r} \left(1 - \frac{1}{\xi_2 r} + \frac{1}{\xi_2^2 r^2} \right) + \alpha \frac{e^{\xi_1 r}}{r} \left(\frac{1}{\xi_1 r} - \frac{1}{\xi_1^2 r^2} \right); \quad (3)$$

$$U_2(r, \omega) = \frac{e^{\xi_2 r}}{r} \left(1 - \frac{3}{\xi_2 r} + \frac{3}{\xi_2^2 r^2} \right) - \alpha \frac{e^{\xi_1 r}}{r} \left(1 - \frac{3}{\xi_1 r} + \frac{3}{\xi_1^2 r^2} \right); \quad (4)$$

$$\xi_1 = \frac{\omega}{C_1}; \quad \xi_2 = \frac{\omega}{C_2}; \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad \alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r};$$

$r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ – відстань між точками \bar{x} і \bar{y} ; ρ – густина матеріалу; $T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$ – узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі, які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили [3]:

$$T_{kj}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \lambda n_j(\bar{y}) \frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)}{\partial y_m} + \mu \left(\frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)}{\partial y_m} \right) n_m(\bar{y}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[r_{,k} n_j T_1 + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right]; \quad (5)$$

$$T_1(r, \omega) = \frac{e^{\xi_2 r}}{r^2} \left(-2 + \frac{6}{\xi_2 r} - \frac{6}{\xi_2^2 r^2} \right) - \frac{e^{\xi_1 r}}{r^2} \left[\alpha \left(2\xi_1 r - 4 + \frac{6}{\xi_1 r} - \frac{6}{\xi_1^2 r^2} \right) - (\xi_1 r - 1) \right]; \quad (6)$$

$$T_2(r, \omega) = \frac{e^{\xi_2 r}}{r^2} \left(\xi_2 r - 3 + \frac{6}{\xi_2 r} - \frac{6}{\xi_2^2 r^2} \right) + \alpha \frac{e^{\xi_1 r}}{r^2} \left(2 - \frac{6}{\xi_1 r} + \frac{6}{\xi_1^2 r^2} \right); \quad (7)$$

$$T_3(r, \omega) = \frac{e^{\xi_2 r}}{r^2} \left(-2\xi_2 r + 12 - \frac{30}{\xi_2 r} + \frac{30}{\xi_2^2 r^2} \right) + \alpha \frac{e^{\xi_1 r}}{r^2} \left(2\xi_1 r - 12 + \frac{30}{\xi_1 r} - \frac{30}{\xi_1^2 r^2} \right). \quad (8)$$

Подамо переміщення точок тіла у вигляді розвинення по ступеням випадкових параметрів λ і μ :

$$u_k(\lambda, \mu) = \bar{u}_k + \overset{\circ}{\lambda} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \lambda} + \overset{\circ}{\mu} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \mu} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \mu^2} + \overset{\circ}{\lambda} \overset{\circ}{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \lambda \partial \mu} + \dots,$$

де $\bar{u}_k = u_k(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$; $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ – математичні сподівання випадкових величин λ і μ ;

$\overset{\circ}{\lambda} = \lambda - \bar{\lambda}$, $\overset{\circ}{\mu} = \mu - \bar{\mu}$ – відповідні центровані випадкові величини.

Аналогічним чином можна подати компоненти фундаментального розв'язку і його похідної:

$$U_{jk}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\mu} G_{jk} = \left(\frac{1}{\bar{\mu}} - \frac{\overset{\circ}{\mu}}{\bar{\mu}^2} + \frac{\overset{\circ}{\mu}^2}{\bar{\mu}^3} - \dots \right) \left(\bar{G}_{jk} + \overset{\circ}{\lambda} \frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial \lambda} + \overset{\circ}{\mu} \frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial \mu} + \right. \quad (9)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\lambda}^2 \frac{\partial^2 \bar{G}_{jk}}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mu}^2 \frac{\partial^2 \bar{G}_{jk}}{\partial \mu^2} + \overset{\circ}{\lambda} \overset{\circ}{\mu} \frac{\partial^2 \bar{G}_{jk}}{\partial \lambda \partial \mu} + \dots \right),$$

$$T_{jk}(\lambda, \mu) = \bar{T}_{jk} + \overset{\circ}{\lambda} \frac{\partial \bar{T}_{jk}}{\partial \lambda} + \overset{\circ}{\mu} \frac{\partial \bar{T}_{jk}}{\partial \mu} + \quad (10)$$

$$+ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\lambda}^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_{jk}}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mu}^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_{jk}}{\partial \mu^2} + \overset{\circ}{\lambda} \overset{\circ}{\mu} \frac{\partial^2 \bar{T}_{jk}}{\partial \lambda \partial \mu} + \dots,$$

де

$$G_{jk}(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{jk} U_0(\lambda, \mu) - r_{,j} r_{,k} U_2(\lambda, \mu) \right],$$

$$\bar{G}_{jk} = \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{jk} \bar{U}_0 - r_{,j} r_{,k} \bar{U}_2 \right], \quad \frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial \lambda} = \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{jk} \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \lambda} - r_{,j} r_{,k} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \lambda} \right],$$

$$\frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial \mu} = \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{jk} \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \mu} - r_{,j} r_{,k} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \mu} \right], \quad \frac{\partial^2 \bar{G}_{jk}}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{jk} \frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial \lambda^2} - r_{,j} r_{,k} \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial \lambda^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 \bar{G}_{jk}}{\partial \mu^2} = \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{jk} \frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial \mu^2} - r_{,j} r_{,k} \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial \mu^2} \right], \dots$$

$$\bar{T}_{kj} = \frac{1}{4\pi} \left[r_{,k} n_j \bar{T}_1 + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) \bar{T}_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \bar{T}_3 \right],$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{kj}}{\partial \lambda} = \frac{1}{4\pi} \left[r_{,k} n_j \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \lambda} + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \lambda} + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial \lambda} \right],$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{kj}}{\partial \mu} = \frac{1}{4\pi} \left[r_{,k} n_j \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \mu} + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \mu} + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial \mu} \right],$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_{kj}}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{4\pi} \left[r_{,k} n_j \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \lambda^2} + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \lambda^2} + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial^2 \bar{T}_3}{\partial \lambda^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_{kj}}{\partial \mu^2} = \frac{1}{4\pi} \left[r_{,k} n_j \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \mu^2} + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \mu^2} + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial^2 \bar{T}_3}{\partial \mu^2} \right], \dots$$

і в свою чергу

$$\bar{U}_0 = U_0(\bar{\lambda}, \bar{\mu}), \quad \bar{U}_2 = U_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu}), \quad \bar{T}_1 = T_1(\bar{\lambda}, \bar{\mu}), \quad \bar{T}_2 = T_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu}), \quad \bar{T}_3 = T_3(\bar{\lambda}, \bar{\mu}),$$

$$\frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \lambda} = \frac{\partial U_0(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \mu} = \frac{\partial U_0(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \lambda} = \frac{\partial U_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \mu} = \frac{\partial U_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial T_1(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \mu} = \frac{\partial T_1(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \lambda} = \frac{\partial T_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \mu} = \frac{\partial T_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 U_0(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial \mu^2} = \frac{\partial^2 U_0(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \mu^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 U_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \lambda^2} \text{ тощо.}$$

Будемо вважати, що відхилення величин λ , μ від їх середніх значень $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ є малим. Тоді, підставляючи наведені рівності в граничний аналог формули Соміліани (1) і групуючи згідно алгоритму методу малого параметру [6, 7] вирази, що домножуються на параметри $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ одного порядку, отримуємо низку рівнянь:

$$\frac{1}{2} \bar{u}_j + \int_{\Gamma} \bar{u}_k \bar{T}_{jk} d\Gamma = \int_{\Gamma} \tau_k \frac{1}{\bar{\mu}} \bar{G}_{jk} d\Gamma, \quad j, k = 1, 3, \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \lambda} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \lambda} \bar{T}_{jk} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{T}_{jk}}{\partial \lambda} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \tau_k \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial \lambda} d\Gamma, \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \mu} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \mu} \bar{T}_{jk} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{T}_{jk}}{\partial \mu} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \tau_k \frac{1}{\bar{\mu}} \left(\frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial \mu} - \frac{1}{\bar{\mu}} \bar{G}_{jk} \right) d\Gamma, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial \lambda^2} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \lambda^2} \bar{T}_{jk} + \bar{u}_k \frac{\partial^2 \bar{T}_{jk}}{\partial \lambda^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \lambda} \frac{\partial \bar{T}_{jk}}{\partial \lambda} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \tau_k \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial^2 \bar{G}_{jk}}{\partial \lambda^2} d\Gamma, \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial \mu^2} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \mu^2} \bar{T}_{jk} + \bar{u}_k \frac{\partial^2 \bar{T}_{jk}}{\partial \mu^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{T}_{jk}}{\partial \mu} \right) d\Gamma =$$

$$= \int_{\Gamma} \tau_k \frac{1}{\bar{\mu}} \left(\frac{\partial^2 \bar{G}_{jk}}{\partial \mu^2} - \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial \mu} + \frac{2}{\bar{\mu}} \bar{G}_{jk} \right) d\Gamma, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial \mu \partial \lambda} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \mu \partial \lambda} \bar{T}_{jk} + \bar{u}_k \frac{\partial^2 \bar{T}_{jk}}{\partial \mu \partial \lambda} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \lambda} \frac{\partial \bar{T}_{jk}}{\partial \mu} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{T}_{jk}}{\partial \lambda} \right) d\Gamma =$$

$$= \int_{\Gamma} \tau_k \frac{1}{\bar{\mu}} \left(\frac{\partial^2 \bar{G}_{jk}}{\partial \mu \partial \lambda} - \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial \lambda} \right) d\Gamma, \dots \quad (16)$$

Для послідовного складання і розв'язання рівнянь (11)-(16) окрім виразів (3), (4), (6)-(8) для компонент ядер U_0, U_2, T_1, T_2, T_3 необхідні також вирази для їх похідних по параметрам λ і μ , які наведені нижче.

$$\frac{\partial U_0}{\partial \lambda} = \frac{\partial U_0}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda} + \frac{e^{\xi_1 r}}{r} \left(\frac{1}{\xi_1 r} - \frac{1}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \mu} = \frac{\partial U_0}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \mu} + \frac{\partial U_0}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \mu} - \frac{e^{\xi_1 r}}{r} \left(\frac{1}{\xi_1 r} - \frac{1}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi_1} = -\frac{e^{\xi_1 r}}{\xi_1^3 r^3} (\xi_1^2 r^2 - 2\xi_1 r + 2), \quad \frac{\partial U_0}{\partial \xi_2} = \frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2^3 r^3} (\xi_2^2 r^2 + 2)(\xi_2 r - 1),$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda} = -\frac{i\omega}{2C_1(\lambda + 2\mu)}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \mu} = -\frac{i\omega}{C_1(\lambda + 2\mu)}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial \mu} = -\frac{i\omega}{2C_2\mu},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = -\frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)^2}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} = \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)^2},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \lambda} = \frac{\partial U_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda} - \frac{e^{\xi_1 r}}{r} \left(1 - \frac{3}{\xi_1 r} + \frac{3}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \mu} = \frac{\partial U_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \mu} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \mu} - \frac{e^{\xi_1 r}}{r} \left(1 - \frac{3}{\xi_1 r} - \frac{3}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \xi_1} = -\alpha \frac{e^{\xi_1 r}}{\xi_1^3 r^3} (\xi_1^3 r^3 - 3\xi_1^2 r^2 + 6\xi_1 r - 6),$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \xi_2} = \frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2^3 r^3} (\xi_2^3 r^3 - 3\xi_2^2 r^2 + 6\xi_2 r - 6),$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda} - \frac{e^{\xi_1 r}}{r^2} \left(2\xi_1 r - 4 + \frac{6}{\xi_1 r} - \frac{6}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mu} = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \mu} + \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \mu} - \frac{e^{\xi_1 r}}{r^2} \left(2\xi_1 r - 4 + \frac{6}{\xi_1 r} - \frac{6}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} = \frac{e^{\xi_1 r}}{\xi_1^3 r^4} \left[\xi_1^4 r^4 + \alpha (-2\xi_1^4 r^4 + 2\xi_1^3 r^3 - 6\xi_1^2 r^2 + 12\xi_1 r - 12) \right],$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi_2} = \frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2^3 r^4} (12 - 12\xi_2 r + 6\xi_2^2 r^2 - 2\xi_2^3 r^3),$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \lambda} = \frac{\partial T_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda} + \frac{e^{\xi_1 r}}{r^2} \left(2 - \frac{6}{\xi_1 r} + \frac{6}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \mu} = \frac{\partial T_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \mu} + \frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \mu} + \frac{e^{\xi_1 r}}{r^2} \left(2 - \frac{6}{\xi_1 r} + \frac{6}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \xi_1} = \alpha \frac{e^{\xi_1 r}}{\xi_1^3 r^4} (2\xi_1^3 r^3 - 6\xi_1^2 r^2 + 12\xi_1 r - 12),$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} = \frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2^3 r^4} (\xi_2^4 r^4 - 2\xi_2^3 r^3 + 6\xi_2^2 r^2 - 12\xi_2 r + 12),$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \lambda} = \frac{\partial T_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda} + \frac{e^{\xi_1 r}}{r^2} \left(2\xi_1 r - 12 + \frac{30}{\xi_1 r} - \frac{30}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \mu} = \frac{\partial T_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \mu} + \frac{\partial T_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \mu} + \frac{e^{\xi_1 r}}{r^2} \left(2\xi_1 r - 12 + \frac{30}{\xi_1 r} - \frac{30}{\xi_1^2 r^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \xi_1} = \frac{e^{\xi_1 r}}{\xi_1^3 r^4} \alpha \left(60 - 60 \xi_1 r + 30 \xi_1^2 r^2 - 10 \xi_1^3 r^3 + 2 \xi_1^4 r^4 \right),$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \xi_2} = \frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2^3 r^4} \left(-60 + 60 \xi_2 r - 30 \xi_2^2 r^2 + 10 \xi_2^3 r^3 - 2 \xi_2^4 r^4 \right).$$

Як бачимо, компоненти U_0 та U_2 та їх похідні містять в знаменнику величину r^3 , а компоненти T_1, T_2, T_3 - величину r^4 . Ця обставина виключає безпосереднє використання виразів (3), (4), (6)-(8), (17)-(26) для обчислення інтегралів по тим граничним елементам, на яких розташований полюс інтегрування. Для подолання цієї перешкоди можна скористатися розвиненням вказаних компонент та їх похідних в ряд Маклорена. Відповідні вирази наведені нижче.

$$U_0 = \sum_{m=1}^M r^{m-2} \kappa_m (m \gamma_m + \alpha), \quad (27)$$

$$U_2 = \sum_{m=1}^M r^{m-2} \kappa_m (m-2)(\gamma_m - \alpha), \quad (28)$$

$$T_1 = - \sum_{m=1}^M r^{m-3} \kappa_m (m-2)(2\gamma_m + 2m\alpha - m - 1), \quad (29)$$

$$T_2 = \sum_{m=1}^M r^{m-3} \kappa_m (m-2)[(m-1)\gamma_m + 2\alpha], \quad (30)$$

$$T_3 = -2 \sum_{m=1}^M r^{m-3} \kappa_m (m-2)(m-4)(\gamma_m - \alpha), \quad (31)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \lambda} = \sum_{m=1}^M r^{m-2} \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda} (m \gamma_m + \alpha) + \kappa_m \left(m \frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda} + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right) \right], \quad (32)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \mu} = \sum_{m=1}^M r^{m-2} \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu} (m \gamma_m + \alpha) + \kappa_m \left(m \frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu} + \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \right) \right], \quad (33)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \lambda} = \sum_{m=1}^M r^{m-2} (m-2) \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda} (\gamma_m - \alpha) + \kappa_m \left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda} - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right) \right], \quad (34)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \mu} = \sum_{m=1}^M r^{m-2} (m-2) \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu} (\gamma_m - \alpha) + \kappa_m \left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu} - \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \right) \right], \quad (35)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} = - \sum_{m=1}^M r^{m-3} (m-2) \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda} (2\gamma_m + 2m\alpha - m - 1) + \kappa_m \left(2 \frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda} + 2m \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right) \right], \quad (36)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mu} = - \sum_{m=1}^M r^{m-3} (m-2) \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu} (2\gamma_m + 2m\alpha - m - 1) + \kappa_m \left(2 \frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu} + 2m \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \right) \right], \quad (37)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \lambda} = \sum_{m=1}^M r^{m-3} (m-2) \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda} ((m-1)\gamma_m + 2\alpha) + \kappa_m \left((m-1) \frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda} + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right) \right], \quad (38)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \mu} = \sum_{m=1}^M r^{m-3} (m-2) \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu} ((m-1)\gamma_m + 2\alpha) + \kappa_m \left((m-1) \frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu} + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \right) \right], \quad (39)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \lambda} = -2 \sum_{m=1}^M r^{m-3} (m-2)(m-4) \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda} (\gamma_m - \alpha) + \kappa_m \left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda} - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right) \right], \quad (40)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \mu} = -2 \sum_{m=1}^M r^{m-3} (m-2)(m-4) \left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu} (\gamma_m - \alpha) + \kappa_m \left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu} - \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \right) \right], \quad (41)$$

де

$$\kappa_m = \frac{1}{(m-1)!(m+1)} \left(\frac{i\omega}{C_1} \right)^{m-1}, \quad \gamma_m = \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{m-1},$$

$$\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda} = \frac{m-1}{2(m-1)!(m+1)} \left(\frac{i\omega}{C_1} \right)^{m+1} \frac{1}{\rho\omega^2}, \quad \frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu} = \frac{m-1}{(m-1)!(m+1)} \left(\frac{i\omega}{C_1} \right)^{m+1} \frac{1}{\rho\omega^2},$$

$$\frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda} = \frac{m-1}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{m-3}}, \quad \frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu} = \frac{(m-1)\lambda}{2\mu^2} \sqrt{\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{m-3}}.$$

Перші доданки розвинень (27)-(37) співпадають із своїми статичними аналогами, і тому їх інтегрування може бути здійснено за звичайними процедурами [Бреб, Бен...]. Але водночас постає питання стосовно кількості членів розвинень (27)-(37), які необхідно утримати для забезпечення необхідної точності обчислень. Співставлення результатів визначення похідних компонент ядер U_0, U_2, T_1, T_2, T_3 за формулами (17)-(26) з наближеними значеннями, отриманими за допомогою виразів (27)-(37) при різній кількості утриманих членів ряду і різних значеннях нормованого параметра частоти, міститься в таблицях 1-10.

Таблиця 1

Результати обчислення величини $\frac{\partial U_0}{\partial \mu}$ за формулами (18) та (33)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial U_0}{\partial \mu}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial U_0}{\partial \mu}$			
	(18)	(33) M=4	(33) M=8	(33) M=12	(18)	(33) M=4	(33) M=8	(33) M=12
0.5	0.151	0.170	0.151	0.151	-0.083	-0.079	-0.083	-0.083
1.0	0.329	0.597	0.333	0.329	0.109	0.235	0.11	0.109
1.5	0.198	1.309	0.282	0.198	0.493	1.333	0.521	0.493
2.0	-0.345	2.306	0.44	-0.329	0.640	2.306	0.440	0.645

Таблиця 2

Результати обчислення величини $\frac{\partial U_0}{\partial \lambda}$ за формулами (17) та (32)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial U_0}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial U_0}{\partial \lambda}$			
	(17)	(32) $M=2$	(32) $M=4$	(32) $M=8$	(17)	(32) $M=2$	(32) $M=4$	(32) $M=8$
0.5	-0.024	-0.028	-0.024	-0.024	-0.013	-0.014	-0.013	-0.013
1.0	-0.015	-0.028	-0.014	-0.015	-0.023	-0.028	-0.023	-0.023
1.5	-0.002	-0.028	0.0	-0.002	-0.028	-0.042	-0.026	-0.028
2.0	0.012	-0.028	0.028	0.012	-0.025	-0.056	-0.019	-0.025

Таблиця 3

Результати обчислення величини $\frac{\partial U_2}{\partial \lambda}$ за формулами (19) та (34)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial U_2}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial U_2}{\partial \lambda}$			
	(19)	(34) $M=2$	(34) $M=4$	(34) $M=8$	(19)	(34) $M=2$	(34) $M=4$	(34) $M=8$
0.5	-0.031	-0.028	-0.031	-0.031	-0.001	0.000	-0.001	-0.001
1.0	-0.038	-0.028	-0.042	-0.038	-0.008	0.000	-0.009	-0.008
1.5	-0.044	-0.028	-0.059	-0.044	-0.025	0.000	-0.031	-0.025
2.0	-0.039	-0.028	-0.083	0.040	-0.048	0.000	-0.074	-0.049

Таблиця 4

Результати обчислення величини $\frac{\partial U_2}{\partial \mu}$ за формулами (20) та (35)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial U_2}{\partial \mu}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial U_2}{\partial \mu}$			
	(20)	(35) $M=4$	(35) $M=8$	(35) $M=12$	(20)	(35) $M=4$	(35) $M=8$	(35) $M=12$
0.5	0.062	0.073	0.062	0.062	0.029	0.032	0.029	0.029
1.0	0.057	0.208	0.059	0.057	0.171	0.252	0.171	0.171
1.5	-0.165	0.434	-0.1	-0.165	0.317	0.852	0.339	0.317
2.0	-0.563	0.75	-0.04	-0.55	0.182	2.019	0.644	0.186

Таблиця 5

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$ за формулами (21) та (36)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$			
	(21)	(36) $M=4$	(36) $M=8$	(36) $M=12$	(21)	(36) $M=4$	(36) $M=8$	(36) $M=12$
0.5	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028	0.001	0.001	0.001	0.001
1.0	-0.031	-0.028	-0.031	-0.031	0.003	0.005	0.003	0.003
1.5	-0.041	-0.028	-0.041	-0.041	0.006	0.016	0.006	0.006
2.0	-0.062	-0.028	-0.059	-0.062	0.002	0.037	0.003	0.002

Таблиця 6

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_1}{\partial \mu}$ за формулами (22) та (37)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial T_1}{\partial \mu}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial T_1}{\partial \mu}$			
	(22)	(37) M=4	(37) M=8	(37) M=12	(22)	(37) M=4	(37) M=8	(37) M=12
0.5	0.006	-0.003	0.006	0.006	-0.023	0.026	-0.023	-0.023
1.0	0.035	-0.097	0.033	0.035	-0.131	-0.206	-0.131	-0.131
1.5	0.257	-0.253	0.193	0.256	-0.205	0.696	-0.227	-0.205
2.0	0.595	-0.472	0.003	0.581	0.016	-1.649	-0.263	0.012

Таблиця 7

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_2}{\partial \lambda}$ за формулами (23) та (38)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial T_2}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial T_2}{\partial \lambda}$			
	(23)	(38) M=4	(38) M=8	(38) M=12	(23)	(38) M=4	(38) M=8	(38) M=12
0.5	0.031	0.031	0.031	0.031	0.001	0.001	0.001	0.001
1.0	0.038	0.042	0.038	0.038	0.008	0.009	0.008	0.008
1.5	0.044	0.059	0.044	0.044	0.025	0.031	0.025	0.025
2.0	0.039	0.083	0.04	0.039	0.048	0.074	0.049	0.048

Таблиця 8

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_2}{\partial \mu}$ за формулами (24) та (39)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial T_2}{\partial \mu}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial T_2}{\partial \mu}$			
	(24)	(39) M=4	(39) M=8	(39) M=16	(24)	(39) M=4	(39) M=8	(39) M=16
0.5	-0.001	-0.012	-0.001	-0.001	0.043	0.05	0.043	0.043
1.0	-0.117	-0.167	-0.106	-0.117	0.199	0.397	0.202	0.199
1.5	-0.557	0.41	-0.302	-0.557	0.119	1.34	0.219	0.119
2.0	-0.859	0.75	1.46	-0.859	-0.657	3.177	0.575	-0.657

Таблиця 9

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_3}{\partial \lambda}$ за формулами (25) та (40)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial T_3}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial T_3}{\partial \lambda}$			
	(25)	(40) M=4	(40) M=8	(40) M=12	(25)	(40) M=4	(40) M=8	(40) M=12
0.5	-0.087	-0.087	-0.087	-0.087	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	-0.10	-0.097	-0.10	-0.10	-0.002	0.0	-0.002	-0.002
1.5	-0.126	-0.115	-0.126	-0.126	-0.012	0.0	-0.012	-0.012
2.0	-0.163	-0.139	-0.157	-0.163	-0.044	0.0	-0.042	-0.044

Таблиця 10

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_3}{\partial \mu}$ за формулами (26) та (41)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu} \operatorname{Re} \frac{\partial T_3}{\partial \mu}$				$\bar{\mu} \operatorname{Im} \frac{\partial T_3}{\partial \mu}$			
	(26)	(41) $M=4$	(41) $M=8$	(41) $M=16$	(26)	(41) $M=4$	(41) $M=8$	(41) $M=16$
0.5	0.138	0.128	0.138	0.138	0.005	0.0	0.005	0.005
1.0	0.356	0.264	0.343	0.356	0.144	0.0	0.140	0.144
1.5	0.541	0.49	0.228	0.541	0.788	0.0	0.656	0.788
2.0	-0.141	0.806	-2.954	-0.142	1.966	0.0	0.351	1.966

Збіжність результатів, отриманих за допомогою різних виразів і наведених в таблицях 1-10, свідчить про надійність отриманої системи співвідношень в широкому діапазоні параметра частоти коливань і про можливість побудови на основі цих співвідношень ефективного чисельного алгоритму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бенерджи П., Баттерфілд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. - 494 с.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. - 524 с.
3. *Becker A.A.* The Boundary Element Method in A Complete Course, McGraw-Hill, New York, 1992. Engineering.
4. *Etouney M., Benaroya H., Wright J.* Boundary element methods in probabilistic structural analysis (PBEM) // Applied Mathematical Modelling Volume 13, Issue 7, July 1989, Pages 432-44.
5. *Daddazio R., Etouney M.* Boundary Element Method in Probabilistic Acoustic Scattering Problems // Boundary Element Methods in Engineering: Proceedings of the International Symposium on Boundary Element Methods. Advances in Solid and Fluid Mechanics, 1989, p.529-543.
6. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984. - 535 с.
7. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. - М.: Наука, 1990 - 360 с.

REFERENCES

1. *Banerjee P.K., Butterfield R.* Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh [Boundary element methods in engineering science]. - M.: Mir, 1984. - 494 s. (rus.)
2. *Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.* Metody granichnykh elementov [Boundary Element Techniques]. - M.: Mir , 1987. - 524 s. (rus.)
3. *Becker A.A.* The Boundary Element Method in Engineering: A Complete Course, McGraw-Hill, New York, 1992.
4. *Etouney M., Benaroya H., Wright J.* Boundary element methods in probabilistic structural analysis (PBEM) // Applied Mathematical Modelling Volume 13, Issue 7, July 1989, Pages 432-44.
5. *Daddazio R., Etouney M.* Boundary Element Method in Probabilistic Acoustic Scattering Problems // Boundary Element Methods in Engineering: Proceedings of the International Symposium on Boundary Element Methods. Advances in Solid and Fluid Mechanics, 1989, p.529-543.
6. *Nayfeh A.* Vvedeniye v metody vozmushcheniy [Introduction to Perturbation Methods]. - M.: Mir, 1984. - 535 s. (rus.)
7. *Blekhman I.I., Myshkis A.D., Panovko Ya.G.* Mekhanika i prikladnaya matematika. Logika i osobennosti prilozheniy matematiki [Mechanics and applied mathematics. The logic and features of mathematics applications]. - M.: Nauka, 1990 - 360 s. (rus.)

Vorona Yu. V., Kara I.D., Shcherbii V. I.

BOUNDARY ELEMENT TECHNIQUE FOR PROBABILISTIC ANALYSIS OF ELASTIC SOLIDS VIBRATIONS

A numerical technique for the boundary element method analysis of steady-state harmonic oscillations of elastic massive structural elements is developed. The technique takes into account the random nature of the physico-mechanical parameters of the material. The deviations of random variables from their average values are considered as a small parameters. The decomposition of unknown densities and kernels of integral equations into a power series by these small parameters is performed. A system of boundary integral equations was obtained using the procedure of the perturbation method. The successive solving of the mentioned equations allows to determine the statistical characteristics of the unknown quantities. Expressions for the derivatives of the fundamental solution of the problem with respect to a small parameter which are the kernels of integral equations are given. A set of approximate expressions was obtained by expanding the fundamental solutions and their derivatives into Maclaurin series in terms of the distance from integration pole parameter. The singularities of the proposed representations coincide with the singularities of the corresponding kernels of the statics problem so they can be used for calculating the integrals over boundary elements containing an integration pole. A comparison of the obtained approximate expressions with their exact analogues is carried out. The number of members of the truncated series which is necessary for a satisfactory representation of the kernels of integral equations in a wide frequency range has been determined.

Keywords: boundary integral equations, fundamental solution, random variables, small parameter.

Ворона Ю. В., Кара І. Д., Щербій В. І.

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ МАССИВОВ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНОГО ХАРАКТЕРА КОНСТАНТ МАТЕРИАЛА

Разрабатывается численная методика для исследования методом граничных элементов установившихся гармонических колебаний упругих массивных элементов конструкций с учетом случайного характера физико-механических параметров материала. Отклонение случайных величин от их средних значений считается малым параметром, по которому выполняются разложения неизвестных плотностей и ядер интегральных уравнений. Получена система граничных интегральных уравнений, последовательное решение которых позволяет определить статистические характеристики неизвестных. Для вычисления сингулярных частей интегралов от фундаментальных решений и их производных предложены приближенные выражения, особенности которых не превышают особенности ядер задачи статики.

Ключевые слова: граничные интегральные уравнения, фундаментальное решение, случайные величины, малый параметр.

УДК 539.3

Ворона Ю.В., Кара І.Д., Щербій В.І. **Гранично-елементна методика дослідження коливаний пружних масивів з урахуванням випадкового характеру констант матеріалу** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2018. - К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 59-70.

Для дослідження за методом граничних елементів усталених коливаний масивних елементів конструкцій розробляється методика, яка враховує випадковий характер фізико-механічних параметрів матеріалу.

Табл. 10. Іл. 0. Бібліогр. 7 назв.

Vorona Yu. V., Kara I.D., Shcherbii V. I. **Boundary element technique for probabilistic analysis of elastic solids vibrations** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 59-70.

A boundary element technique for the analysis of steady-state oscillations of solid structural elements is developed. The technique takes into account the random nature of the physico-mechanical parameters of the material.

Tabl. 10. Fig. 0. Ref. 7

Ворона Ю. В., Кара И. Д., Щербий В. И. Граничноэлементная методика исследования колебаний упругих массивов с учетом случайного характера констант материала // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 2018. – К.: КНУСА, 2018. - Вып. 100. – С. 59-70.

Для исследования по методу граничных элементов установившихся колебаний массивных элементов конструкций разрабатывается методика, которая учитывает случайный характер физико-механических параметров материала.

Табл. 10. Ил. 0. Библиогр. 7 назв.

Автор: кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ВОРОНА Юрій Володимирович

Адреса робоча: 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29

Мобільний тел.: +38(050)750-13-61

E-mail: yuvv@ukr.net

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

Автор: асистент кафедри будівельної механіки КАРА Ірина Дмитрівна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітрофлотський, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

Робочий тел.: +380 (44) 241-54-12;

Мобільний тел.: +380 (93) 398-63-24;

E-mail: ikruska007@ukr.net

Автор: аспірант кафедри будівельної механіки Щербій Владислав Іванович

Адреса робоча: 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

Мобільний тел.: +38(093) 623288

E-mail: scherby248@mail.com

УДК 517.11+519.92+539.3

НЕЧІТКЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТУВАННІ ШАРНІРНО-СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

В.О. Бараненко,

д-р техн. наук, професор кафедри будівельної механіки

Д.Л. Волчок,

канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури
м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, 49600*

В даній роботі розглядаються задачі оптимального проектування шарнірно-стержневої системи, на яку накладено обмеження на жорсткість, міцність та стійкість в умовах нечіткої та нечітко-випадкової інформації. Запропоновано методика розв'язання задачі на основі застосування теорії нечітких множин. Розроблено алгоритм реалізації запропонованої методики. Описано основні етапи нечіткого моделювання: фазифікація, оптимізація та аналіз, дефазифікація. Оптимізація здійснено на основі методу динамічного програмування. Проведено аналіз вибору коефіцієнта надійності по навантаженню. Наведено результати впливу форми і характеру функції належності при нечіткому завданні інформації на оптимальні розв'язки.

Ключові слова: шарнірно-стержнева система, нечіткі та нечітко-випадкові величини, оптимальне проектування конструкцій, нечітке моделювання, метод динамічного програмування.

Вступ

В теорії проектування конструкцій оптимальні задачі формулюються, в основному, у вигляді детермінованих (чітких) моделей математичного програмування. Представляє інтерес розгляд таких задач оптимального проектування конструкцій (ОПК), в яких була б врахована інформаційна ситуація стосовно вихідних даних, умов закріплення, поведінки середовища, цілей та інших факторів невизначеної природи. Для формулювання і розв'язання таких задач потрібен відповідний математичний апарат, який априорно включав би в себе можливість урахування цієї ситуації. Поняття невизначеність інтуїтивно зрозуміло кожній людині. Проте її формалізація викликає певні труднощі.

Невизначеність в механіці характеризується наявністю даних випадкової, нечіткої або неточної природи. Можлива ситуація, коли відсутня взагалі інформація. Проектування і виготовлення конструкції чи споруди здійснюється в межах нормативних документів. Але вони можуть суттєво змінюватися в певних границях. Тим самим і породжується невизначеність. Наприклад, механічні і фізичні характеристики подаються в довідниках, як правило, в інтервальному вигляді.

Відношення до невизначеності довгий час було і остається зневажливим. Думка про "терпимість" конструкції, що проектується, до вихідних даних, які б мали властивість змінюватися є приваблива. Тут під терміном "терпимість" розуміємо здатність механічної системи перетворювати вихідну неповну інформацію у детерміновані результати через використання методів моделювання, аналізу, оптимізації, "м'яких обчислень".

Моделювання випадкової невизначеності здійснюється в границях теорії ймовірностей. Тут апріорно передбачаються відомими і достовірними функції розподілу та щільності випадкової величини, їх числові характеристики. Цю інформацію отримують на основі обробки великої статистичної вибірки.

В механіці теорія ймовірностей займає важливе місце при розгляді різноманітних задач аналізу, ОПК з урахуванням надійності [1]. Довгий час вважалось, що все необхідне для роботи за невизначеністю дає теорія ймовірностей. Але з часом у зв'язку зі зміною сприйняття людиною навколишнього середовища адекватність цього підходу почала визивати сумніви.

Опис даних у вигляді, наприклад, "навантаження прикладене десь в середині балки", "величина навантаження трохи більше, ніж 10 кН ", "частота коливань досягає приблизно 20 Гц ", "коефіцієнт знаходиться в інтервалі..." і т.д. здійснюється в межах першого етапу (фазифікації) нечіткого моделювання. Цей етап є відповідальним. Він дозволяє за допомогою функції належності описати нечітку множину того чи іншого фактора, поданого у словесному вигляді - квантифікаторів. Функція належності, як і функція розподілу в теорії ймовірностей йде поза теорії нечітких множин. Вона може бути побудована, наприклад, за невеликою статистичною вибіркою. Квантифікатори, в основному, моделюються за допомогою функції належності трикутного, трапецеїдального, гаусового типу [2].

Другий етап нечіткого моделювання є аналіз (або оптимізація) механічної системи з урахуванням нечітких множин. Тут використовується α -рівневий підхід, метод Монте-Карло, властивості теорії нечітких множин.

Отримані нечіткі результати трансформують у чіткі на третьому етапі нечіткого моделювання - дефазифікації, наприклад, за способом очікуваного значення [3], середнього центру [4] та інше.

Мета цієї роботи - адаптувати теорію нечітких множин до класу задач будівельної механіки - оптимального проектування пружних шарнірно-стержневих систем (ШСС).

1. Означення та об'єкт оптимізації

Розглянемо оптимальне проектування статично визначеної ШСС з n елементами. Припускається, що шарніри є ідеально гладкими, а осі усіх елементів системи проходять через геометричні центри. Зовнішнє навантаження є зосереджені сили, які прикладені у r вузлах ($j = 1, 2, \dots, r$); $r \leq m$, де m - число усіх вузлів ШСС. Вага конструкційних деталей вузлів і стержнів конструкції включається в зовнішнє навантаження. Припускається, що навантаження має невизначений опис типу "діюча сила близька до...", "приблизно дорівнює...", "трохи більше (менше), ніж..." та інше. Осьова сила по довжині елемента вважається сталою величиною, а переріз елементів не змінює свою конфігурацію.

Означення 1. Під оптимальною конструкцією розуміють механічну систему мінімальної ваги (об'єму, вартості та інш.), яка задовольняє умовам несучої здатності - міцності, стійкості, жорсткості і конструктивних обмежень, що накладаються на величину площ поперечних перерізів елементів - змінних проектування.

Змінними проектування можуть бути площі поперечних перерізів, у випадку згину елементів - моменти інерції. Умову міцності і стійкості розтягнутих і стиснених елементів ШСС, які сприймають зовнішнє навантаження, запишемо як

$$\sigma_i = \frac{|N_i|}{A_i} \leq R_i^*, \quad (1)$$

де

$$R_i^* = \begin{cases} R_o, & \text{для розтягнутих елементів } (N_i > 0) \\ \varphi_{\min} R_o, & \text{для стиснутих елементів } (N_i < 0) \end{cases}$$

Тут позначено через N_i , σ_i відповідно поздовжнє зусилля елемента і нормальне напруження. Величина φ_{\min} - коефіцієнт поздовжнього згину елемента, який відповідає максимальній гнучкості. У відповідності [5] для основних елементів системи (поясів ферм, колон, пілонів) $\varphi_{\min} = 0.8 \dots 0.9$, а для решіток $\varphi_{\min} = 0.6 \dots 0.7$. Довжину елемента і площу поперечного перерізу позначимо відповідно через l_i та A_i . Матеріал елемента характеризується модулем пружності E і розрахунковим опором R_o .

Умова жорсткості - вертикальне переміщення деякого вузла k ШСС, задається формулою Мора

$$y_k = \sum_{k=1}^n \frac{D_{ik}}{A_k} \leq [y]; \quad D_{ik} = \frac{N_i N_{ik} l_i}{E}, \quad (2)$$

де N_{ik} - осьова сила в i - елементі від дії одиночного навантаження, яке прикладене у вузол k за напрямом шуканого переміщення. Величина $[y]$ є допустимим значенням переміщення y , тобто $y \leq [y] \leq y^{\max}$, де y^{\max} значення переміщення y при граничних значеннях A_i із умов міцності.

Конструктивним обмеженням може бути, наприклад, двобічна нерівність (обмеження на габарити)

$$A_i^- \leq A_i \leq A_i^+, \quad (3)$$

де A_i^- , A_i^+ - задані величини. Величина A_i в межах інтервалу (3) може змінюватись дискретним чи неперервним чином. Дискретне завдання припускає наявність сортаменту, який включає певне число профілів. Значення осьових сил $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$, $\bar{N}_k = \{N_{1k}, N_{2k}, \dots, N_{nk}\}$ визначають із рівнянь рівноваги системи (за допомогою методу матриці сил), а саме:

$$N = BP; \quad \bar{N}_k = B\bar{P}_k,$$

в якому $P = (P_1, P_2, \dots, P_m)$; $\bar{P}_k \in (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ - є вектор одиночного навантаження, яке прикладене до деякого вузла k . Об'єм системи має вигляд

$$V = \sum_{i=1}^n l_i A_i. \quad (4)$$

Використовуючи наведені вище співвідношення, сформулюємо таку оптимізаційну задачу: в непустій множині $\Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega_i$ точок

$A = \{A_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) знайти такі елементи A_i^{opt} , які задовольняють обмеження (1-3) і надають мінімум показнику якості (4), тобто

$$(V^{opt}, A^{opt}) = \arg \left\{ \min_{A_i \in \Omega_i} \sum_{i=1}^n l_i A_i \left| \sum_{i=1}^n D_{ik} / A_i \leq [y] \right. \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

де множини Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) утворюються із умов (1), (3) а саме:

$$\Omega_i = \left\{ A_i : A_i^* \leq A_i \leq A_i^+; A_i^* = \max(|N_i| / R_i^*; A_i^+) \right\}. \quad (6)$$

Зауваження 1. Величини N_i і D_i є дійснозначними функціями діючого навантаження P .

Зауваження 2. Оптимізаційна модель (5)-(6) для певного навантаження P є детермінованою.

Зауваження 3. Якщо розглядається проектування статично невизначеної системи в модель (5) уводять до розгляду також, в якості обмеження, рівняння сумісності деформацій.

В тому випадку, коли навантаження має нечіткий опис $\xi = \tilde{P}$, змінні зусилля N_i^{fuz} , величини перерізів A_i^{fuz} та величина обсягу V^{fuz} є також нечіткими величинами, а задача (5) прийме вигляд:

$$(V^{fuz}, A^{fuz}) = \arg \left\{ \min_{A_i \in \Omega_i(\xi)} \sum_{i=1}^n l_i A_i \left| \sum_{i=1}^n D_{ik}(\xi) / A_i \leq [y] \right. \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Для її розв'язання залучено математичний апарат теорії нечітких множин [2]. При детермінованих даних в задачі (5)-(6) використано метод динамічного програмування (ДП) [6, 7].

2. Чисельна ілюстрація оптимального проектування конструкції

2.1. Формулювання вихідних (початкових) даних в оптимізаційній моделі

На прикладі оптимального проектування нескладної статично визначеної шарнірно-стержевої системи (ШСС) мінімального об'єму, не порушуючи загальності, розглянемо підхід теорії нечітких множин до

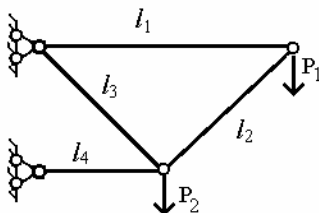


Рис. 1. Розрахункова схема

випадку, коли діюче навантаження у вузлі є нечітко означеним, наприклад, "у вузол 1 прикладене навантаження близьке до $2 \kappa H$ ", або "прикладене навантаження трохи більше, ніж $2 \kappa H$ " та інше.

ШСС має чотири елемента ($n = 4$) і два вузли ($m = 2$) (рис. 1).

У вузлі цієї конструкції прикладене навантаження $P = \{P_1, P_2\}$. Довжини

елементів задаються як $l_1 = 1000\sqrt{2}$ мм, $l_2 = l_3 = 1000$ мм, $l_4 = 500\sqrt{2}$ мм. Модуль пружності E дорівнює 207 кН/мм², границю моменту опору взято $R_0 = 0,15$ кН/мм² для розтягнутих елементів. Для стиснутих елементів $\varphi_{\min} R_0$, де φ_{\min} - коефіцієнт поздовжнього прогину. В числових розрахунках взято $\varphi_{\min} = 2/3$.

Зусилля $N = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ визначаються з рівняння $N = BP$, де B - матриця перетворення сил $P = (P_1, P_2)$. В прикладі, що розглядається, матриця B має вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

елементи якої отримано способом вирізання вузлів.

2.2. Метод динамічного програмування

Модель (5)-(6) в математичному програмуванні відносять до класу так званих задач "розподілу ресурсу", до яких адаптовано метод динамічного програмування [7]. За цим методом уведемо до розгляду таку функцію Беллмана

$$f_i(d_i) = \min_{A_i, A_{i+1}, \dots, A_n} \sum_{j=i}^n l_j A_j, \quad (8)$$

$f_i(d_i)$ - мінімальне значення об'єму ШСС в припущенні, що процес пошуку $\{A_i^{opt}\}$ ($j = i, i+1, \dots, n$) починається з елементу $j = i$ і закінчується елементом $j = n$. Аргументом цієї функції є величина "ресурсу" d_i , яка пов'язана зі змінною проектування A_i таким співвідношенням

$$d_i = \sum_{j=i}^n D_j / A_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad d_i \geq 0; \quad d_p = [y]. \quad (9)$$

Із означення (9) випливає

$$d_i = \frac{D_i}{A_i} + \sum_{j=i+1}^n D_j / A_j \rightarrow d_i = \frac{D_i}{A_i} + d_{i+1},$$

звідки маємо

$$d_{i+1} = d_i - \frac{D_i}{A_i}. \quad (10)$$

Аналогічним чином із означення (10) побудуємо таке рівняння:

$$f_i(d_i) = \min_{A_i} \left[l_i A_i + \min_{A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_n} \sum_{j=i+1}^n l_j A_j \right],$$

із якого випливає

$$f_i(d_i) = \min_{A_i} [l_i A_i + f_{i+1}(d_{i+1})], \quad i = n-1, n-2, \dots, 1; \quad d_1 = [y], \quad f_{n+1}(d_{n+1}) \equiv 0. \quad (11)$$

Рівняння (9) побудовано з використанням принципу Беллмана [6]. Воно є основним функціональним рівнянням методу динамічного програмування. За термінологією цього методу d_i – є змінна "стану", A_i – є змінною "керування" (проектування).

Для $i = n$ із означення (9) маємо

$$d_n = D_n / A_n, \quad A_n = D_n / d_n, \quad (12)$$

$$f_n(d_n) = \min_{A_n} l_n A_n = l_n D_n / d_n. \quad (13)$$

Розглянемо випадок, коли $i = n - 1$. Рівняння (11) для цього випадку має вигляд

$$f_{n-1}(d_{n-1}) = \min_{A_{n-1}} [l_{n-1} A_{n-1} + f_n(d_n)], \quad d_n = d_{n-1} - D_{n-1} / A_{n-1}. \quad (14)$$

Перепишемо рівняння (14) з урахуванням означення (13), тобто

$$f_{n-1}(d_{n-1}) = \min_{A_{n-1}} \left[l_{n-1} A_{n-1} + \frac{l_n D_n}{d_{n-1} - D_{n-1} / A_{n-1}} \right].$$

Виконуючі далі аналогічні дії для $i = n - 2, n - 3, \dots, 1$ за методом математичної індукції отримаємо таке рівняння

$$f_i(d_i) = \min_{A_i} H(A_i), \quad (15)$$

де

$$H(A_i) = l_i A_i + T_i + \frac{D_n l_n}{d_i - S_i^* - D_n / A_i}, \quad (16)$$

$$T_i = \sum_{j=i}^{n-1} l_j A_j, \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$S_i^* = \begin{cases} \sum_{j=i}^{n-1} D_j / A_j^*, & \text{для } i = 1, 2, \dots, n-2 \\ 0, & \text{для } i = n-1. \end{cases} \quad (17)$$

Використання необхідної умови існування екстремуму функції $H(A_i)$ із (15)-(16) дає таке рівняння відносно змінної A_i

$$l_i A_i^2 - \frac{D_n l_n D_i}{(a_i^* A_i - D_i)^2} = 0, \quad (18)$$

де $a_i^* = d_i - S_i^*$.

Розв'язком рівняння (18) буде

$$\left. \begin{aligned} A_i^0 &= \frac{D_i + \sqrt{l_n D_n D_i / l_i}}{a_i^*} \\ i &= 1, 2, \dots, n-1; \\ A_n^0 &= \frac{D_n}{d_n}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Для кожного значення індексу i формується оптимальний розв'язок за виразом

$$\{A_i^{opt}\} = \begin{cases} A_i^0, & \text{якщо } A_i^- < A_i^0 < A_i^+ \\ A_i^-, & \text{якщо } A_i \leq A_i^0 \\ A_i^+, & \text{якщо } A_i \geq A_i^+ \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

Зауваження 4. В задачі (15) має місце мінімум, тому що

$$\frac{d^2 H}{dA_i^2} = A_i [l_i + D_n l_n D_i (a_i^*)^2 + D_n l_n D_i^2 a_i^*] \geq 0$$

(достатня умова існування екстремуму).

2.3. Ітераційна процедура

Отримані співвідношення (19) - (20) покладено в основу такого рекурентного алгоритму:

1. Задається початкове наближення $\{A_i^*\}$ ($i = 1, 2, \dots, n; k = 0$) за умови $A_i^{(k)} > A_i^-$ і обчислюється відповідне значення об'єму $V^{(k)} = \sum_{i=1}^n l_i A_i^{(k)}$.
2. Обчислюються величини S_i^* ($i = 1, 2, \dots, n-1$) за формулою (17).
3. Для $i = 1, 2, \dots, n-1$ за виразом (19) обчислюється A_i^0 ; $i = 1, 2, \dots, n$ з урахуванням, що $d_1 = [y]$.
4. Формується нове наближення змінної керування за правилом (20), тобто $\{A_i^{(k+1)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) і відповідне значення об'єму $V^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n l_i A_i^{(k+1)}$.
5. Умовою закінчення рекурентних обчислень є

$$\left| \frac{V^{(k+1)} - V^{(k)}}{V^{(k)}} \right| \leq \varepsilon, \quad (21)$$

де ε - задана точність розрахунків.

Якщо умова (21) не виконується, треба перевизначити такі змінні $V^{(k)} = V^{(k+1)}$, $\{A_i^{(k)}\} = \{A_i^{(k+1)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) і повторити обчислення з п.2.

В результаті виконання запропонованої обчислювальної процедури отримується послідовність розв'язків $\{A_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) яка збігається до своїх границь

$$\{A_i^{(k)}\} \rightarrow \{A_i^{opt}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \{V^{(k)}\} \rightarrow \{V^{opt}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Збіжність ітераційної процедури обґрунтована в роботі автора [6].

Для числових даних, що наведено вище, збіжність ілюстровано таблицею.

Таблиця 1

Збіжність по функціоналу V при початковому значенні $A_i^0 = 100 \text{ мм}^2$
($i = 1, 2, 3, 4$)

$\lg \varepsilon$	$V^{(k)}$	Кількість ітерацій
-1	260625	2
-2	259310	3
-3	259871	4
-4	259806	5
-5	259865	6
-7	259865	6

3. Нечітке моделювання

Основними етапами нечіткого моделювання є:

- фазифікація вихідних нечітких даних, тобто їх опис за допомогою функції належності;
- виконання задач аналізу або оптимізації при фазифікованих змінних;
- дефазифікація – перетворення нечітких результатів в чіткі.

3.1. Фазифікація навантаження

Нехай навантаження, яке прикладене у вузлі ШСС, задається словесно: *«трохи більше, ніж 2 кН»*.

Не порушуючи загальності підходу, опишемо нечітке навантаження за допомогою нечіткої множини P з функцією належності $\mu(x)$ трикутного виду, тобто:

$$\mu_P(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{if } a \leq x < m \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{if } m < x \leq b \\ 1, & \text{if } x = m \\ 0, & \text{for another} \end{cases} \quad (22)$$

Тут m_p – модальне значення навантаження. Величини a, b характеризують інформаційну гранулу $(a, m, b); a \leq m \leq b$ - ступінь нечіткості прикладеного навантаження.

Носій нечіткої множини, де $\mu > 0$ - гранулу $(a, m, b)_\Delta$, можна записати у вигляді

$$a = m - \Delta_1 \leq x \leq b = m + \Delta_2, \quad (23)$$

де Δ_1, Δ_2 - значення розкиду фазифікованої величини від модального значення m . Якщо вважати, що $\Delta_1 = k_1 m / 100$, $\Delta_2 = k_2 m / 100$, то вираз (23) прийме вигляд $m(1 - k_1 / 100) \leq x \leq m(1 + k_2 / 100)$. Тут коефіцієнти k_1, k_2 характеризують ступінь нечіткості у відсотках (%).

На основі означення (23) для поставленої задачі, у випадку коли $a = m$, запишемо в дискретному вигляді нечіткі множини P_1 і P_2 для M дискретів (α -рівнів). Для прикладу M взято 5, тобто (рис. 2):

$$P_i = \frac{1}{2} + \frac{0.8}{2.04} + \frac{0.4}{2.12} + \frac{0.2}{2.16} + \frac{0}{2.2}, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Тут $m_p = 2$, $k_1 = 0$, $k_2 = 10\%$.

За теорією нечітких множин в кожному доданку (24), що записані у вигляді "дробу", "чисельник" є значення функції належності для $k = 0, 1, 2, \dots, M$ α -рівнів, в "знаменнику" записують відповідні детерміновані значення нечіткої множини. Таким чином, множина P_i є об'єднання усіх доданків виразу (24).

3.2. Оптимізація

На цьому етапі за процедурою динамічного програмування для кожного детермінованого значення в множинах P_i ($i = 1, 2$) обчислюються детерміновані значення об'ємів $V^*(P)$ і перерізів $A_j^*(P)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

З цих величин утворюються нечіткі множини значень об'ємів ШСС

$$V_p^* = \frac{1}{V_1^*} + \frac{0.8}{V_2^*} + \frac{0.4}{V_3^*} + \frac{0.2}{V_4^*} + \frac{0}{V_5^*}, \quad V_j^* = V_j^*(P_1, P_2), \quad j = 1, 2, \dots, 5. \quad (25)$$

Аналогічно, для перерізів

$$\{A_i^*\} = \frac{1}{\{A_{1i}^*\}} + \frac{0.8}{\{A_{2i}^*\}} + \frac{0.4}{\{A_{3i}^*\}} + \frac{0.2}{\{A_{4i}^*\}} + \frac{0}{\{A_{5i}^*\}}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Приклад 1. Нехай задається нечітке $P_1 = \tilde{2}кН$, і детерміноване $P_2^{\det} = 2кН$.

Для цих значень навантажень, враховуючи опис (25), і виконуючи розрахунки за алгоритмом динамічного програмування, отримаємо нечітку множину оптимальних об'ємів

$$V_p^* = \frac{1}{259903} + \frac{0.8}{263850} + \frac{0.4}{271737} + \frac{0.2}{275677.6} + \frac{0}{279615.8}. \quad (26)$$

Приклад 2. Нехай задається детерміноване $P_1^{\det} = 2кН$, а нечітке $P_2 = \tilde{2}кН$.

Для цього випадку отримаємо нечітку множину об'ємів аналогічно випадку 1.

$$V_p^* = \frac{1}{259903} + \frac{0.8}{261151.9} + \frac{0.4}{263604} + \frac{0.2}{264862} + \frac{0}{266121.8}. \quad (27)$$

Приклад 3. Нехай два навантаження є нечіткими величинами, тобто $P_1 = \tilde{2}кН$, а $P_2 = \tilde{2}кН$ з відомими їх описами. В цьому випадку необхідно побудувати за допомогою означення декартового добутку нечітку множину навантажень, тобто

$$P = (P_1 \times P_2).$$

Для навантаження (24) нечітка множина P буде такою:

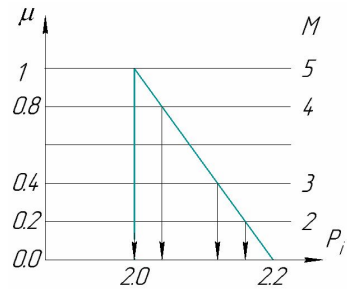


Рис. 2. Функція належності навантаження P_i

$$\begin{aligned}
 P = & \frac{1}{(2,2)} + \frac{0.8}{(2,2.04)} + \frac{0.4}{(2,2.12)} + \frac{0.2}{(2,2.16)} + \frac{0.8}{(2.04,2)} + \frac{0.8}{(2.04,2.04)} + \\
 & + \frac{0.4}{(2.04,2.12)} + \frac{0.2}{(2.04,2.16)} + \frac{0.4}{(2.12,2)} + \frac{0.4}{(2.12,2.04)} + \frac{0.4}{(2.12,2)} + \\
 & + \frac{0.2}{(2.12,2.12)} + \frac{0.2}{(2.16,2)} + \frac{0.2}{(2.16,2.04)} + \frac{0.2}{(2.16,2.12)} + \frac{0.2}{(2.16,2.16)}.
 \end{aligned} \quad (28)$$

Для кожної пари навантажень (P_1, P_2) із (28) треба обчислити V^* за процедурою ДП. В результаті маємо

$$\begin{aligned}
 V^* = & \frac{1}{209903} + \frac{0.8}{261152} + \frac{0.4}{268642} + \frac{0.2}{264883} + \frac{0.8}{263850} + \frac{0.8}{265101} + \\
 & + \frac{0.4}{267596} + \frac{0.2}{268840} + \frac{0.4}{271738} + \frac{0.4}{272993} + \frac{0.4}{275497} + \frac{0.2}{276746} + \\
 & + \frac{0.2}{275678} + \frac{0.2}{276936} + \frac{0.2}{279445} + \frac{0.2}{280695}.
 \end{aligned} \quad (29)$$

Зауваження 5. Доданок з $\mu = 0$ не включено у записи виразів (28) і (29).

3.3. Дефазифікація

Сутність етапу дефазифікації полягає в перетворенні нечіткої величини V^* в чітке число V^{def} . Це можна зробити, як приклад, за правилом середнього центру [4]

$$V^{def} = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i V_i^*}{\sum_{i=1}^N \mu_i},$$

Дефазифікацію можна зробити і іншим способом, який, наприклад, запропонував Б. Лю [3]

$$V^{def} = \sum_{i=1}^N w_i V_i^*,$$

де вагові коефіцієнти w_i визначаються за такими виразами:

$$w_i = w_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \quad m = 2M - 1, \quad (30)$$

де $w_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + A_0 - B_0)$, для $i = 1$, $w_i = \frac{1}{2}(C_0 - D_0 + Q_0 - S_0)$, для

$$2 \leq i \leq m - 1, \quad w_m = \frac{1}{2}(A_0 - P_0 + \beta_m), \quad \beta_i = \mu_i, \quad A_0 = \max_{1 \leq j \leq m} \beta_j, \quad B_0 = \max_{1 < j \leq m} \beta_j,$$

$$C_0 = \max_{1 \leq j \leq i} \beta_j, \quad D_0 = \max_{1 \leq j < i} \beta_j, \quad S_0 = \max_{1 < j \leq m} \beta_j, \quad Q_0 = \max_{i \leq j \leq m} \beta_j, \quad P_0 = \max_{i \leq j < m} \beta_j. \quad M -$$

кількість β - рівнів ; $0 \leq \beta_j \leq 1$, $1 \leq j \leq M$.

$$\beta = \{\beta_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta_5 = \beta_6 = 0.8, \quad \beta_3 = \beta_7 = \beta_9 = \beta_{10} = \beta_{11} = 0.4,$$

$$\beta_4 = \beta_8 = \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = \beta_{15} = \beta_{16} = 0.2.$$

3.4. Числові результати проектування ШСС

За вище описаною процедурою дефазифікації для випадків 1-3 навантажень отримано результати, які подано в таблиці 2.

Таблиця 2

Дефазифіковані площі перерізів

№ вип.	P_1	%	P_2	%	V^{def}	%	A_1^{def}	A_2^{def}	A_3^{def}	A_4^{def}
1	$\tilde{2}$	10	2	-	264506	1.8	40.53	57	80.4	98.6
2	2	-	$\tilde{2}$	10	261352	0.6	39.83	56.02	79.93	97.71
3	$\tilde{2}$	10	$\tilde{2}$	10	267238	2.9	40.83	57.45	81.44	99.8
det	2	-	2	-	259903	0	39.72	55.86	79.85	97.06

В графі % дано процент розкиду навантаження та відхилення отриманого розв'язку від детермінованого.

4. Оптимальне проектування ШСС при навантаженні нечітково-випадкового характеру

Нехай для ШСС (рис. 1) навантаження $P = \{P_1, P_2\}$ задається випадковим чином:

- 1) $P = (\tilde{2}; \tilde{2})$ - подія D_1 з імовірністю q_1 ;
- 2) $P = (\tilde{2}; 0)$ - подія D_2 з імовірністю q_2 .

Випадкові події утворюють повну групу подій і тому $q_1 + q_2 = 1$. Для кожного навантаження відповідно за процедурою динамічного програмування виконується оптимізаційний розрахунок і подальша дефазифікація, в результаті якої отримуються дефазифіковані значення об'єму $V_1^{def}(\tilde{2}, \tilde{2}) = 267238 \text{ мм}^3$ з імовірністю q_1 , $V_2^{def}(\tilde{2}, 0) = 197746 \text{ мм}^3$ з імовірністю q_2 .

Дерандомізація отриманих результатів здійснюється за правилом обчислення математичного сподівання, тобто

$$V^{der} = V_1^{def} q_1 + V_2^{def} q_2.$$

Для деяких q_1 виконано числові ілюстрації, які надано в таблиці 3.

Таблиця 3

Результати розрахунків

$P = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$	$(\tilde{P}_1; 0)$	V^{derand} (дерандомізація)	$V^{der} > V^{det}$
q_1	$q_2 = 1 - q_1$		
0.05	0.95	201224	на 22.5% < V^{det}
0.8	0.2	253340	на 2.5% < V^{det}
0.9	0.1	260289	на 0.1% > V^{det}
0.95	0.005	263763	на 1.48% > V^{det}
0.98	0.02	265848	на 2.28% > V^{det}
1	0	267238	на 2.8% > V^{det}
$P_1 = 2$	$P_2 = 2$	259903	

5. Оцінка коефіцієнта надійності по навантаженню

Одноєю із важливих характеристик розрахунку будівельних конструкцій за методикою граничних станів є коефіцієнт γ надійності по навантаженню [8]. Він враховує несприятливі відхилення значення дії від нормативної величини навантаження. Цей коефіцієнт, як правило, встановлюється певними дослідженнями природи дій сил і аналізу статистичних даних про них. Шуканий коефіцієнт γ визначається як відношення розрахункового навантаження P_p до величини нормативного P_H , тобто

$$\gamma = P_p / P_H. \quad (31)$$

Розрахункове навантаження повинно включати будь-які випадки реального навантаження на конструкцію. Коли інформаційна ситуація щодо реального навантаження носить нечіткий характер, розрахункове навантаження P_p може бути визначене за допомогою використання процедури нечіткого моделювання. За даною інформацією про нечіткі характеристики навантаження реалізується оптимізаційна задача (5) з урахуванням перевірки умов функціонування. Результат реалізації задачі є деяке значення V^{def} . Очевидно, що цьому значенню відповідає проект з деяким еквівалентним навантаженням P_{det} . Його значення можна знайти за допомогою розв'язання нелінійного рівняння

$$V^{def} = \min_{A_i} V(P_{det}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

з урахуванням умов $A_i \geq A_i^-$ і $y = \sum_{i=1}^n D_i / A_i \leq [y]$.

Чисельну ілюстрацію цього підходу зробимо для ШСС (рис. 1), інформацію про яку наведено в п.2.

Нехай нечітке навантаження "трохи більше, чим $2 \kappa H$ " прикладене у вузол 1. У вузлі 2 ніякого навантаження нема. Нехай функція належності взята у формі (23) для випадку коли $a = m$. Розкид описується % відхилення від модального значення m . Для 5 - дискретів при $k_1 = 0$, $k_2 = 10\%$ нечітка множина навантаження записується як

$$P(\tilde{2}, 0) = \frac{1}{(2, 0)} + \frac{0.8}{(2.04, 0)} + \frac{0.4}{(2.12, 0)} + \frac{0.2}{(2.16, 0)} + \frac{0}{(2.2, 0)}.$$

В результаті реалізації алгоритму, оптимізації отримано нечітке значення об'єму та його дефазифіковане значення

$$V^* = \frac{1}{193239} + \frac{0.8}{197104.4} + \frac{0.4}{204834} + \frac{0.2}{208698.6} + \frac{0}{212563}; \quad V^{def} = 197748 \text{ мм}^3.$$

Корень рівняння (32) з урахуванням отриманого $V^{def} = 197748 \text{ мм}^3$ буде $P_p = 2.0466$. За означенням (31) маємо коефіцієнт надійності по навантаженню $\gamma = 1.023$.

Аналогічно, виконаємо розрахунки для випадків, коли $k_1 = 0$, а $k_2 = 20, 30, 40\%$, для 5 дискретів:

1) для $k_2 = 20\%$ маємо

$$P(\tilde{2}, 0) = \frac{1}{(2, 0)} + \frac{0.8}{(2.08, 0)} + \frac{0.4}{(2.24, 0)} + \frac{0.2}{(2.32, 0)} + \frac{0}{(2.4, 0)}.$$

В результаті реалізації алгоритму оптимізації отримаємо нечітку множину об'єму:

$$V^* = \frac{1}{193329} + \frac{0.8}{200369} + \frac{0.4}{216428} + \frac{0.2}{224157} + \frac{0}{231887},$$

та його дефазифіковане значення $V^{def} = 202257 \text{ мм}^3$.

Розв'язок рівняння (32) для отриманого $V^{def} \in P_{def} = 2.0934$.

2) для $k_2 = 30\%$ маємо

$$P(\tilde{2}, 0) = \frac{1}{(2, 0)} + \frac{0.8}{(2.12, 0)} + \frac{0.4}{(2.36, 0)} + \frac{0.2}{(2.48, 0)} + \frac{0}{(2.6, 0)}.$$

В результаті реалізації алгоритму оптимізації отримаємо нечітке значення об'єму:

$$V^* = \frac{1}{193329} + \frac{0.8}{204834} + \frac{0.4}{228022} + \frac{0.2}{239616} + \frac{0}{251265},$$

та його дефазифіковане значення $V^{def} = 206766 \text{ мм}^3$. Розв'язок рівняння (32) для отриманого $V^{def} \in P_{def} = 2.14$.

3) для $k_2 = 40\%$ маємо

$$P(\tilde{2}, 0) = \frac{1}{(2, 0)} + \frac{0.8}{(2.16, 0)} + \frac{0.4}{(2.48, 0)} + \frac{0.2}{(2.64, 0)} + \frac{0}{(2.8, 0)}.$$

В результаті реалізації алгоритму оптимізації отримаємо нечітке значення об'єму:

$$V^* = \frac{1}{193329} + \frac{0.8}{208699} + \frac{0.4}{239616} + \frac{0.2}{255075} + \frac{0}{270533},$$

та його дефазифіковане значення $V^{def} = 211275$. Розв'язок рівняння (32) для отриманого $V^{def} \in P_{def} = 2.19$.

За отриманими результатами розрахунків сформуємо таблицю 4.

Таблиця 4

Результати розрахунків коефіцієнту запасу (надійності)

k_2	10%	20%	30%	40%	За ДБН [8]
$V^{def}, \text{мм}^3$	197748	202257	206766	211275	
$P_{def}, \text{кН}$	2,046	2,0934	2,14	2,19	
γ	1.023	1.0467	1,07	1,095	1.1

Таблиця 4 показує, як змінюється коефіцієнт надійності по навантаженню γ в залежності від розкиду k_2 нечіткого завдання величини P . Рисунок 3 ілюструє це змінювання графічно. Як видно з рис. 3 величина γ змінюється лінійно. За рекомендаціями ДБН [8] максимальне

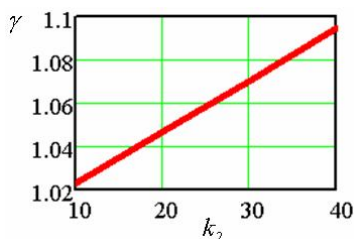


Рис. 3. Залежність коефіцієнту γ від величини розкиду в нечіткому опису навантаження "трохи більше, чим $2 \kappa H$ "

значення коефіцієнту γ пропонується рівним 1.1, яке відповідає детермінованому значенню $P = 2.2 \kappa H$, що майже дорівнює 40% величини розкиду Δ від $m_P = 2$ в опису заданого навантаження "трохи більше, чим $2 \kappa H$ ", яке прикладене у вузол 1 розглянутої ШСС.

6. Оцінка модуля Юнга в задачах оптимального проектування пружних ШСС із залученням нечітких множин

6.1. Постановка задачі

В багатьох довідниках із опору матеріалів деякі механічні характеристики матеріалів задаються у вигляді інтервалів. Наприклад, для границі міцності σ_B (чавун сірий) у випадку розтягнення складає $[140;180] \text{ Mna}$, у випадку стискання - $[600;1000] \text{ МПа}$. Сталь машинобудівна (конструкційна) вуглецева має інтервал напруження $[60;250] \text{ МПа}$. Модуль пружності E для цієї сталі буде таким $[2.0...2.1] \cdot 10^5 \text{ МПа}$ та інш. [9].

Ставиться таке питання: яке значення тієї чи іншої характеристики треба брати із заданого інтервалу, якщо вона так задається, для подальших інженерних розрахунків? В літературі відповіді на це питання немає. Також нема відповіді на питання: чи є заданий інтервал континуумом значень характеристики, що розглядається? На нашу думку, конкретне значення характеристики береться із заданого інтервалу, так щоб не порушувалися умови несучої здатності. На прикладі вибору характеристики як модуль пружності E подано можливий спосіб розв'язання поставленої проблеми. Цей спосіб складається з трьох етапів. На першому етапі визначаються нечітка множина - оптимальний об'єм V^{def} при нечіткому завданні модуля E .

На другому етапі визначається дефазифіковане значення V_{det}^{def} . На третьому - числове розв'язання рівняння

$$E^* = \arg \{V(E) - V_{det}^{def} = 0\},$$

де V - є визначеним значенням об'єму за допомогою методу ДП при детермінованому значенні E .

Інтервал, з якого беруться можливі значення характеристики E будемо інтерпретувати як нечітку множину із заданою функцією належності, наприклад трапецієвидного (рис. 4), або трикутного виду (рис. 5).

Ці функції мають відповідно

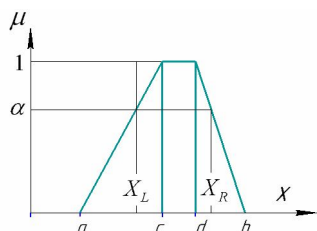


Рис. 4. Трапецієвидна функція належності

аналітичний вигляд

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{c-a}, & \text{if } a \leq x \leq c \\ 1, & \text{if } c \leq x \leq d \\ \frac{b-x}{b-d}, & \text{if } d \leq x \leq b \\ 0 & \end{cases} \quad (33)$$

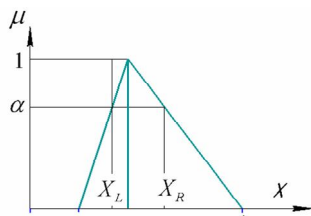


Рис. 5. Трикутна функція належності

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{if } a \leq x < m \\ 1, & \text{if } x = m \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{if } m < x \leq b. \end{cases} \quad (34)$$

Виконаємо деякі числові експерименти за запропонованою методикою.

Експеримент 0.

Нехай надана функція належності нечіткого трапецієвидного числа $E(a, c, d, b)$ рис. 4 в графічному вигляді, як на рис. 6. в табл. 11. Нечітка множина модуля пружності $E(\alpha)$ в залежності від α -рівня в цьому випадку наведено в табл. 5.

Таблиця 5

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
α -рівні	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
Модуль пружності $E(\alpha)$, кН/мм^2	200	200.6	201.2	201.5	201.8	202.4	203	205	206	207	207.5	208	209	210
Об'єм $V^{opt}(\alpha)$, мм^3	269000	268195.3	2673956	266997.5	266600.5	265810.2	265024.6	262439	261165.1	259903.4	259277.2	258653.9	257416.4	256190.6
Вагові коефіцієнти для дефазифікації w_i	0	0.029	0.057	0.071	0.086	0.114	0.143	0.143	0.114	0.086	0.071	0.057	0.029	0

Четвертий рядок $V^{opt}(\alpha)$ є результат оптимального проектування при заданих $E(\alpha)$. Величина $V_{det}^{def} = 263485 \text{ мм}^3$ є дефазифікованим значенням нечіткої множини $V = \sum_{i=1}^{14} \frac{\alpha_i}{V_i(a)}$. Величина $V = 263485 \text{ мм}^3$ відповідає об'єму конструкції при детермінованому значенні $E = 204.19 \text{ кН/мм}^2$, тому що відносна різниця між V^{def} і V_{det} має невелике значення 0.0001%. Таким чином, в цьому експерименті при нечіткому завданні числа $E(200, 203, 205, 210)$ з трапецієвидною функцією належності (34) отримано $E = 204.19 \text{ кН/мм}^2$.

Аналогічно виконуються експерименти 1-5.

Експеримент 1.

Нехай модуль пружності Юнга відповідно до рис. 4 задано так: $E(200, 205, 207, 210)$. Графічне подання функції належності нечіткого трапецієвидного числа $E(a, c, d, b)$ надано на рис. 7 в табл. 11. Запишемо нечітку множину $E(\alpha)$ таким чином:

$$E = \frac{0}{200} + \frac{0.2}{201} + \frac{0.4}{202} + \frac{0.5}{202.5} + \frac{0.6}{203.5} + \frac{0.8}{204} + \frac{1}{205} + \frac{1}{207} + \frac{0.8}{207.6} + \frac{0.6}{208.2} + \frac{0.5}{208.5} + \frac{0.4}{208.8} + \frac{0.2}{209.4} + \frac{0}{210}.$$

Для визначення елементів множини $E(\alpha)$ використовуємо:

$$L: \mu(x) = \begin{cases} \frac{x-200}{205-200}, & 200 \leq x \leq 205, \\ X_L = \alpha m + a(1-\alpha), \end{cases}$$

$$R: \mu(x) = \begin{cases} \frac{210-x}{210-207}, & 207 \leq x \leq 210, \\ X_R = \alpha m + b(1-\alpha), \end{cases} \alpha \in [0, 1].$$

За допомогою програми динамічного програмування обчислення мінімального об'єму ферми дає:

$$V^{opt} = \frac{0}{268999} + \frac{0.2}{267661.6} + \frac{0.4}{266336.5} + \frac{0.5}{265679} + \frac{0.6}{265024.6} + \frac{0.8}{263725} + \frac{1}{262439} + \frac{1}{259903.4} + \frac{0.8}{259152.3} + \frac{0.6}{258405.4} + \frac{0.5}{258033.6} + \frac{0.4}{257662.9} + \frac{0.2}{256924.66} + \frac{0}{256190.6}.$$

Тут доречний запис двох множин $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$ об'єднати в табл. 6.

Таблиця 6

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha), \text{кН/мм}^2$	200	201	202	202.5	203	204	205	207	207.6	208.2	208.5	208.8	209.4	210
$V^{opt}(\alpha), \text{мм}^3$	269000	267661.6	266336.5	265679	265024.6	263725	262439	259903.4	259152.3	258405.4	258033.6	257662.9	256924.66	256190.6

Дефазифікація виконана за правилом центра $V_{det}^{def} = \sum_0^{14} w_i V_i$;

$w_i = \mu(\alpha) / \sum_{\alpha \in [0,1]} \mu(\alpha)$; Відомо, що $V_{det} = 259903 \text{ мм}^3$ при $E = 207 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2}$.

$V_{det}^{def} = 261526.5 \text{ мм}^3$. Це складає $\Delta = 0.62\%$ відхилення від V_{det} , тобто

$$\Delta = \frac{|V_{det}^{def} - V_{det}|}{V_{det}} \cdot 100\%.$$

Експеримент 2.

Нехай модуль пружності Юнга відповідно до рис. 4 задано так: $E(200, 203, 207, 210)$. Множини E і V об'єднаємо в табл. 7.

Дефазифіковане значення об'єму для цього експерименту буде $V_{det}^{def} = 262494.92 \text{ мм}^3$.

Таблиця 7

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha)$, кН/мм ²	200	200.6	201.2	201.5	201.8	202.4	203	207	207.6	208.2	208.5	208.8	209.4	210
$V^{opt}(\alpha)$, мм ³	269000	268195.3	267395.6	266997.5	266600.5	265810.4	265024.6	259903.4	259152.3	258405.4	258033.6	257662.9	256924.6	256190.6

Експеримент 3.

Нехай модуль пружності Юнга відповідно до рис. 5 задано так: $E(200, 205, 210)_\Delta$. Графічне подання цієї функції представлено на рис. 9. в табл. 11. Зведемо множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$ до табл. 8.

Таблиця 8

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha)$, кН/мм ²	200	201	202	202.5	203	204	205	206	207	207.5	208	209	210
$V^{opt}(\alpha)$, мм ³	269000	267661.6	266336.5	265679	265024.6	263725	262439	261165	259903.4	259277.2	258654	257416.4	256190
w_i	0	0.033	0.067	0.083	0.1	0.133	0.167	0.133	0.1	0.083	0.067	0.033	0

Дефазифіковане значення об'єму відповідно до наведеної методики буде $V_{det}^{def} = 262203.7 \text{ мм}^3$.

Експеримент 4.

Нехай модуль пружності Юнга задано трикутною функцією належності рис.5 таким чином: $E(200, 207, 210)_\Delta$. Графічне подання цієї функції представлено на рис. 10 в табл. 11. Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$ зведемо до табл. 9.

Таблиця 9

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha)$, кН/мм ²	200	201.4	202.8	203.5	204.2	205.6	207	207.2	208.2	208.5	208.8	209.4	210
$V^{opt}(\alpha)$, мм ³	269000	267130	265286	264373.4	263467.2	261673.2	259903.4	259652.6	258405.5	258033.7	257662.9	256924.6	256190

Дефазифіковане значення об'єму відповідно до наведеної методики буде $V_{det}^{def} = 260880.3 \text{ мм}^3$.

Експеримент 5.

Нехай модуль пружності Юнга задано трикутною функцією належності рис. 5 таким чином: $E(200, 203, 210)_\Delta$. Графічне подання відповідає рис. 11 в табл. 11.

Дефазифіковане значення об'єму відповідно до наведеної методики буде $V_{det}^{def} = 264143 \text{ мм}^3$.

Таблиця 10

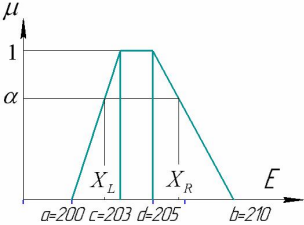
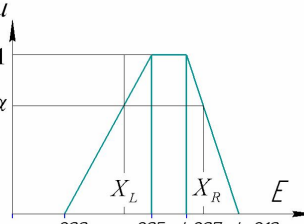
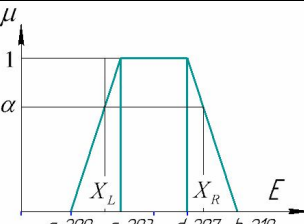
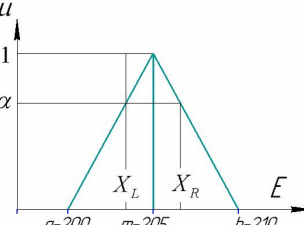
Нечіткі множини E і V^{opt}

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha)$, кН/мм ²	200	200.6	201.2	201.5	201.8	202.4	203	204.4	205.8	206.5	207.2	208.6	210
$V^{opt}(\alpha)$, мм ³	269000	268195.3	267395.6	266697.4	266600.5	265810.2	265024.6	263209.4	261418.9	260532.7	259652.6	257910	256191

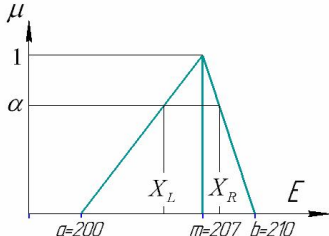
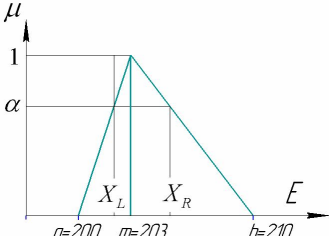
Результати усіх п'яти експериментів зведено до табл. 11, де зображено відповідні графічні подання функцій належності рис. 6-11, дефазифіковані значення об'єму V_{det}^{def} для експериментів 0-5 та, відповідне до дефазифікованого значення об'єму, значення модуля пружності Юнга E^* .

Таблиця 11

Результати експериментів

№ експ.	E^{fuzzy} , кН/мм ²	V_{det}^{def} , мм ³	E^* , кН/мм ²	Характер функції належності
0	 <p data-bbox="219 497 568 563">Рис. 6. Графічне подання функції належності нечіткого трапецієвидного числа $E(200, 203, 205, 210)$</p>	263485.2	204.19	Несиметрична
1	 <p data-bbox="219 811 568 877">Рис. 7. Графічне подання функції належності нечіткого трапецієвидного числа $E(200, 205, 207, 210)$</p>	261526,5	205,72	Несиметрична
2	 <p data-bbox="219 1141 568 1207">Рис. 8. Графічне подання функції належності нечіткого трапецієвидного числа $E(200, 203, 207, 210)$</p>	262495	204.96	Симетрична
3	 <p data-bbox="219 1471 568 1538">Рис. 9. Графічне подання функції належності нечіткого трикутного числа $E(200, 205, 210)$</p>	262203.7	205	Симетрична

Продовження табл. 11

4	 <p data-bbox="224 388 548 470">Рис. 10. Графічне подання функції належності нечіткого трикутного числа $E(200, 207, 210)$</p>	260880.3	206.23	Несиметрична, мода t наближається до правого кінця інтервалу
5	 <p data-bbox="224 726 548 809">Рис. 11. Графічне подання функції належності нечіткого трикутного числа $E(200, 203, 210)$</p>	264143	203,58	Несиметрична, мода t наближається до лівого кінця інтервалу

7. Сумісна дія двох навантажень на ШСС

Нехай розглядається сумісна дія двох нечітких навантажень «трохи більше, ніж 2 кН» описані нечіткі множини

$$P_1^{fuzzy} = \frac{1}{2} + \frac{0.8}{2.04} + \frac{0.4}{2.12} + \frac{0}{2.2}, \quad P_2^{fuzzy} = \frac{1}{2} + \frac{0.8}{2.04} + \frac{0.4}{2.12} + \frac{0}{2.2}.$$

На основі означення декартового добутка [4] нечітких множин P_1 і P_2 отримаємо

$$\begin{aligned} P_1 \times P_2 &= \frac{\min(1,1)}{(2,2)} + \frac{\min(1,0.8)}{(2,2.04)} + \frac{\min(1,0.4)}{(2,2.12)} + \frac{\min(1,0)}{(2,2.2)} + \frac{\min(0.8,1)}{(2.04,2)} + \\ &+ \frac{\min(0.8,0.8)}{(2.04,2.04)} + \frac{\min(0.8,0.4)}{(2.04,2.12)} + \frac{\min(0.8,0)}{(2.04,2.2)} + \frac{\min(0.4,1)}{(2.12,2)} + \frac{\min(0.4,0.8)}{(2.12,2.04)} + \\ &+ \frac{\min(0.4,0.4)}{(2.12,2.12)} + \frac{\min(0.4,0)}{(2.12,2.2)} + \frac{\min(0,1)}{(2.2,2)} + \frac{\min(0,0.8)}{(2.2,2.04)} + \frac{\min(0,0.4)}{(2.2,2.12)} + \frac{\min(0,0)}{(2.2,2.2)} = \\ &= \frac{1}{(2,2)} + \frac{0.8}{(2,2.04)} + \frac{0.4}{(2,2.12)} + \frac{0}{(2,2.2)} + \frac{0.8}{(2.04,2)} + \frac{0.8}{(2.04,2.04)} + \frac{0.4}{(2.04,2.12)} + \\ &+ \frac{0}{(2.04,2.2)} + \frac{0.4}{(2.12,2)} + \frac{0.4}{(2.12,2.04)} + \frac{0.4}{(2.12,2.12)} + \frac{0}{(2.12,2.2)} + \\ &+ \frac{0}{(2.2,2)} + \frac{0}{(2.2,2.04)} + \frac{0}{(2.2,2.12)} + \frac{0}{(2.2,2.2)}. \end{aligned}$$

Значення об'єму при даних навантаженнях з решітки декартового добутку розраховується за алгоритмом ДП, в результаті чого отримаємо:

$$V^{fuzzy} = \frac{1}{259903} + \frac{0.8}{261152} + \frac{0.4}{263641.6} + \frac{0}{266122} + \frac{0.8}{263850.4} + \frac{0.8}{265101.3} +$$

$$+ \frac{0.4}{267596.0} + \frac{0}{270081} + \frac{0.4}{271737.4} + \frac{0.4}{272993} + \frac{0.4}{275497.4} + \frac{0}{277993} +$$

$$+ \frac{0}{279616} + \frac{0}{280876} + \frac{0}{283389} + \frac{0}{285893}.$$

Етап дефазифікації отриманої нечіткої множини дає $V^{def} = 265296.2 \text{ мм}^3$.

$$\text{Співвідношення } \Delta\% = \frac{V^{def} - V_{det}(2,2)}{V_{det}(2,2)} =$$

= 2.07% показує наскільки очікуваний результат більше, чим результат, отриманий при детермінованих значеннях.

Висновки

1. Показано застосування одного із сучасних методів "м'яких" обчислень - теорія нечітких множин до задач вагової оптимізації.

2. Нечітке моделювання дозволяє оцінити вплив степеню "розмитості" вихідних даних на кінцевий результат.

3. Наведено задача проектування, коли інформація про навантаження має невизначеність другого роду, а саме: нечітко-випадковий опис.

4. Сформульовані етапи нечіткого моделювання.

5. Виконано числові експерименти для різноманітних комбінацій нечіткого навантаження.

6. Пропонований підхід застосовано для оцінки показника навантаження по надійності і модуля пружності.

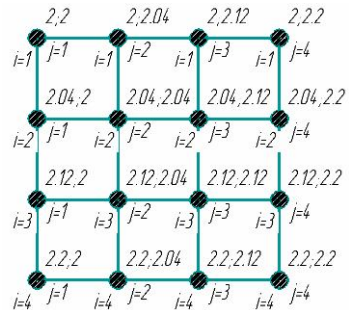


Рис. 13. Решітка значень діючого навантаження у вузлі ферми

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1971. — 255 с.
2. Борисов В.В. Федулов А.С., Зернов М.М. Основы нечёткой математики // Кн.1. Теория нечётких множеств. - М.: Горячая линия – Телеком, 2014. – 88 с.
3. Лю Б. Теория и практика неопределённого программирования. - М.: Бинум и лаборатория знаний. - 2005. - 416 с.
4. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы. - М.: Горячая линия- Телеком.- 2008.-383 с.
5. Стрелецкий Н.С., Гениев А.Н., Беленя Е.И., Балдин В.А., Лессинг Е.Н. Металлические конструкции - Москва: Стройиздат, 1961. - 776 с.
6. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования - М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1965. - 460 с.
7. Бараненко В.А. Динамическое программирование и последовательные приближения // Придніпровський науковий журнал. Фізико-математичні науки, грудень 1998 №12 (179). 1998. С. 38-44
8. ДБН В.1.2-2:2006 Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів «Навантаження і впливи». - К: Мін. буд. України, 2016. – 75 с
9. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С. Опір матеріалів. - К.: Вища школа. - 2004. - 655 с.

REFERENCES

1. *Boletin V.V.* Primenenie metodov teorii veroyatnostey i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzheniy (Application of methods of probability theory and reliability theory in calculations of structures).- M.: Izd-vo literatyryi po stroitelstvu, 1971. - 255 p.
2. *Borisov V.V., Fedulov A.S., Zernov M.M.* Osnovy nechyotkoy matematiki (Basics of fuzzy mathematic) // Kn.1. Teoriya nechyotkih mnozhestv. - M.: Goryachaya liniya – Telekom 2014. - 88 p.
3. *Lyu B.* Teoriya i praktika neopredelyonnogo programmirovaniya (Theory and practice of uncertain programming). - M.: Binom i laboratoriya znaniy. - 2005. - 416 p.
4. *Rutkovskaya D., Pilinskiy M., Rutkovskiy L.* Neyronnye seti, geneticheskie algoritmy i nechyotkie sistemy (Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems). -M.: Goryachaya liniya- Telekom.-2008. - 383 p.
5. *Streletskiy N.S., Geniev A.N., Beleya E.I., Baldin V.A., Lessing E.N.* Metallicheskie konstruksii (Metal constructions) - Moskva: Stroyizdat, 1961. - 776 p.
6. *Bellman R., Dreyfus S.* Prikladnyye zadachi dinamicheskogo programmirovaniya (Applied dynamic programming problems) - M.: Nauka. Glavnaya redaktsiya Fiziko-matematicheskoy literatury, 1965. - 460 p.
7. *Baranenko V.A.* Dinamicheskoe programmirovaniye i posledovatelnyye priblizheniya (Dynamic programming and successive approximations) // Pridnirovskiy naukoviy zhurnal. Fiziko-matematichni nauki, grudn 1998 №12 (179). 1998. P. 38-44
8. DBN V.1.2-2:2006 Sistema zabezpechennya nadlynosty ta bezpeki budivelnih ob'ektiv «Navantazhennya i vplivi» (System of reliability and safety of building objects "Load and influences").- K: Min. bud. Ukrayini, 2016. - 75 p
9. *Pisarenko G.S., Kyitka O.L., Umanskiy E.S.* Opir materialiv (Strength of Materials). - K.: Vischa shkola. - 2004. - 655 p.

Стаття надійшла 17.07.2018

Baranenko V.A., Volchok D.L.

FUZZY MODELING IN OPTIMAL DESIGN OF HINGE-ROD SYSTEMS

In design theory, optimal problems are formulated in the form of deterministic (clear) models of mathematical programming. It is of interest to consider such tasks of optimal designing of structures, which would take into account the information situation in relation to the initial data, conditions of consolidation, behavior of the environment, goals and other factors of the uncertain nature. For the formulation and solution of such problems, an appropriate mathematical apparatus is needed that would a priori include the possibility of taking into account this situation. The concept of uncertainty is intuitive for every person. However, its formalization causes some difficulties.

Simulation of random uncertainty is carried out in the boundaries of probability theory. Here a priori are assumed to be known and reliable functions of distribution and density of random variables, their numerical characteristics. This information is obtained on the basis of processing a large statistical sample.

For a long time it was believed that all the necessary work for uncertainty gives the theory of probabilities. But over time, due to a change in human perception of the environment, the adequacy of this approach began to cause doubts.

In this paper we consider the problems of optimal design of a hinge-rod system, which is imposed a restriction on rigidity, strength and stability under conditions of fuzzy and fuzzy-random information. The application of one of the modern methods of "soft" computing - the theory of fuzzy sets to problems of weight optimization is shown.

The implementation of the problem is accomplished using the method of dynamic programming. The algorithm of implementation of the set optimization models is developed. The stages of fuzzy simulation are formulated and described: fuzzification, optimization and analysis, defuzzification.

The analysis of the choice of load safety factor coefficient is carried out using the proposed methodology. The results of the influence of the form and character of the membership function in the case of fuzzy data information about Young's modulus on optimal solutions are given. According to the defuzzified volume of hinge-rod system we can propose corresponding determined Young's modulus as recommendation. Numerical examples for various load combinations are given and results of all numerical experiments show how the mechanical system reacts to the inaccurate description of the given load. The problem of designing, when the information of the load is uncertain as the fuzzy-random description is presented.

Keywords: hinge-rod system, fuzzy and fuzzy-random variables, optimal design, fuzzy modeling, dynamic programming method.

Бараненко В.А., Волчок Д.Л.

НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В данной работе рассматриваются задачи оптимального проектирования шарнирно-стержневой системы, на которую наложено ограничения по жесткости, прочности и устойчивости в условиях нечеткой и нечетко-случайной информации. Предложена методика решения задачи на основе применения теории нечетких множеств. Разработан алгоритм реализации предлагаемой методики. Описаны основные этапы нечеткого моделирования: фазификация, оптимизация и анализ, дефазификация. Оптимизация осуществлена на основе метода динамического программирования. Проведен анализ выбора коэффициента надежности по нагрузке. Приведены результаты влияния формы и характера функции принадлежности при нечетком задании информации на оптимальные решения.

Ключевые слова: шарнирно-стержневая система, нечеткие и нечетко-случайные величины, оптимальное проектирование конструкций, нечёткое моделирование, метод динамического программирования.

УДК 517.11+519.92+539.3

Бараненко В.О., Волчок Д.Л. Нечітке моделювання в оптимальному проектуванні шарнірно-стержневих систем // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2018. - К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. - С. 71-93.

Розглянуто задачу оптимального проектування шарнірно-стержневої системи, на яку накладено обмеження щодо жорсткості, міцності та стійкості в умовах неповної інформації нечіткого та нечітко-випадкового характеру.

Табл. 11. Лл. 12. Бібліогр. 7 назв.

Baranenko V.A., Volchok D.L. Fuzzy modeling in optimal design of hinge-rod systems // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 71-93. – Ukr.

The problem of optimal design of a hinge-rod system, which is imposed by the stiffness, durability and stability restriction in conditions of incomplete information of fuzzy and fuzzy-random nature is considered.

Tables 11. Fig. 12. Ref. 7.

Бараненко В.А., Волчок Д.Л. Нечеткое моделирование в оптимальном проектировании шарнирно-стержневых систем // Сопروتвление материалов и теория сооружений. – 2018. – К.: КНУСА, 2018. - Вып. 100. – С. 71-93.

Рассмотрена задача оптимального проектирования шарнирно-стержневой системы, на которую наложено ограничение по жесткости, прочности и устойчивости в условиях неполной информации нечеткого и нечетко-случайного характера.

Табл. 11. Ил. 12. Библиогр. 7 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор БАРАНЕНКО Валерій Олексійович

Адреса робоча: 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, БАРАНЕНКО Валерій Олексійович

Робочий тел.: +38(056)7563422

Мобільний тел.: +38(066) 125-459-7

E-mail: baranenko1941@ukr.net

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4658-1205>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, заступник декана факультету ПЦБ ВОЛЧОК Денис Леонідович

Адреса робоча: 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, ВОЛЧОК Денис Леонідович

Робочий тел.: +38(056)7563422;

Мобільний тел.: +38(066) 727-656-0

E-mail: Denys.L.Volchok@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7914-321X>

УДК 624.078.4+539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ З ПОЗДОВЖНІМ ДЕФЕКТОМ

С.С. Куреннов,

д-р техн. наук, доцент, професор кафедри вищої математики

Національний аерокосмічний університет ім. М.Е. Жуковського «ХАІ»

Переміщення елементів зовнішніх несучих шарів в поперечному напрямку вважаються рівними нулю. Задачу зведено до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно поздовжніх переміщень шарів, яку розв'язано за допомогою методу відокремлення змінних. Розв'язана модельна задача. Показано, що відсутність клею вздовж бічної сторони з'єднання може значною мірою збільшувати напруження біля краю клейового шару.

Ключові слова: двовимірна модель, аналітичний розв'язок, клейове з'єднання, тришарова конструкція.

Вступ. Більшість математичних моделей напускних клейових з'єднань є одновимірними [1]. Тобто припускають заданий апріорі розподіл напружень за товщиною шарів (як правило, рівномірний або лінійний) і рівномірний розподіл напружень за шириною з'єднання. Однак розрахунок напруженого стану з'єднань в ряді випадків вимагає врахування нерівномірності розподілу напружень і переміщень за шириною з'єднання. Прикладами таких конструкцій є з'єднання силових елементів з обшивкою, ремонтні накладки, і т.п. Побудова аналітичного розв'язку задачі про двовимірний напружений стан з'єднання в загальній постановці є надзвичайно складною задачею, розв'язок якої поки невідомий [2]. Побудова розв'язку навіть для одного шару є складною проблемою [3]. Тому, як правило, для дослідження двовимірного напруженого стану з'єднань використовуються чисельні методи, зокрема метод скінченних різниць і метод скінченних елементів [4-6]. Для побудови аналітичного розв'язку даної задачі в роботі [7] була запропонована спрощена двовимірна модель напускного з'єднання двох пластин, яка заснована на гіпотезі про високу жорсткість шарів в напрямку, поперечному до напрямку навантаження. Ця модель, наприклад, вперше дозволила отримати аналітичний розв'язок задачі про напружений стан клейового з'єднання пластинок різної ширини [9]. Адекватність даної моделі була перевірена порівнянням розрахунків виконаних за моделлю з розрахунками, виконаними за допомогою методу скінченних елементів а також з результатами експериментів [9].

Метою даної роботи є розв'язання задачі про напружений стан з'єднання, яке не містить клею уздовж бічних сторін з'єднання. Слід зазначити, що відомі роботи, де досліджується вплив на напружений стан з'єднання порушень суцільності клейового шару біля торців області склейки, або в середині з'єднання [10, 11]. При цьому клей вважається відсутнім вздовж всієї ширини з'єднання, що дозволяє застосувати одновимірні математичні моделі з'єднання. В даній роботі суцільність клейового шару вважається порушеною вздовж бічних сторін склеєних пластин, тобто за довжиною

з'єднання, що вимагає застосування щонайменше двовимірної математичної моделі. Дана задача є актуальною але розглядається уперше.

Постановка задачі та рівняння рівноваги. Розглянемо симетричний клейове з'єднання двох прямокутних пластинок, що показано на рис. 1.

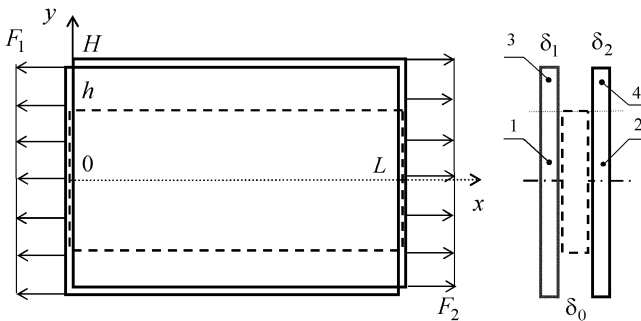


Рис. 1

Поздовжня вісь ($0x$) є віссю симетрії. Симетрія дозволяє виключити вплив згину в площині з'єднання і розглянути лише половину даної конструкції. Довжина з'єднання L , ширина пластинок $2H$, ширина зони склейки $2h$. Товщини з'єднаних шарів і клейового шару відповідно δ_1 , δ_2 і δ_0 . Будемо вважати, що переміщення і напруження рівномірно розподілені за товщиною шарів. З'єднані пластини покладемо абсолютно жорсткими в напрямку осі $0y$. Тобто елементи шарів мають тільки поздовжні переміщення, які в області склейки позначимо U_1 і U_2 , а переміщення на бічних ділянках відповідно U_3 і U_4 для першого і для другого шарів. За ступенем ідеалізації дана модель займає проміжне положення між балочними моделями будівельної механіки (опір матеріалів) і теорії пружності, і була запропонована, наприклад, в роботах В.В. Васильєва [12, 13].

Рівняння рівноваги елементів зовнішніх шарів в області склейки ($y \in [-h; h]$) мають вид

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \quad -\tau + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

де N_m , q_m – нормальні (поздовжні) і дотичні зусилля в шарі m , де $m = 1, 2$; τ – дотичні напруження в клейовому шарі в поздовжньому напрямку.

Співвідношення Коші за умов відсутності поперечних переміщень мають вигляд

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x}, \quad q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial y}, \quad m = 1, 2,$$

де E_m – модуль пружності шару m в напрямку осі $0x$; G_m – модуль зсуву шару m в площині $x0y$.

Дотичні напруження в клейовому прошарку вважаємо пропорційними різниці між переміщеннями зовнішніх шарів [1, 4]

$$\tau = P_0(U_2 - U_1), \quad (2)$$

де P_0 – жорсткість клейового шару на зсув, яка, зазвичай, визначається як $P_0 = G_0/\delta_0$. Тут відповідно G_0 – модуль зсуву клейового шару.

Підставивши наведені вище співвідношення в рівняння (1), отримуємо систему [7]

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - U_1 + U_2 = 0 \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) + U_1 - U_2 = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

$$\text{де } \alpha_m = \frac{E_m \delta_m}{P_0}; \quad \mu_m = \frac{G_m}{E_m}.$$

Поза межами ділянки склейки переміщення шарів за вказаних вище гіпотезах описується рівняннями [12, 13]

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_4}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

З огляду на симетрію, крайові умови мають вигляд:

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_3}{\partial y} \Big|_{y=H} = \frac{\partial U_4}{\partial y} \Big|_{y=H} = 0; \quad (5)$$

$$N_2 \Big|_{x=0} = E_2 \delta_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_2(y); \quad N_4 \Big|_{x=0} = E_2 \delta_2 \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_2(y); \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0; \quad (7)$$

$$N_1 \Big|_{x=L} = E_1 \delta_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_1(y); \quad N_3 \Big|_{x=L} = E_1 \delta_1 \frac{\partial U_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_1(y). \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_m}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\partial U_{m+2}}{\partial y} \Big|_{y=h}, \quad U_m \Big|_{y=h} = U_{m+2} \Big|_{y=h}, \quad m = 1, 2. \quad (9)$$

Умови (5) представляють собою умови рівності нулю дотичних напружень в несучих шарах вздовж осі симетрії і вільних країв.

Побудова розв'язку. З першого рівняння системи (3) можна виразити переміщення другого шару через переміщення першого

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

Підставивши (9) в друге рівняння системи (3), отримуємо

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad (11)$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2; \quad \beta_2 = (\mu_1 + \mu_2) \beta_1; \quad \beta_3 = \mu_1 \mu_2 \beta_1; \quad \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2; \quad \beta_5 = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2.$$

В роботі [7] за допомогою методу відокремлення змінних було отримано загальний розв'язок рівняння (11) за умовою $\mu_1 = \mu_2$, і показано що розв'язок має вигляд суми

$$U_m = W_m(x) + V_m(x, y),$$

де $W_m(x)$ являє собою класичний одновимірний розв'язок Фолькерсена [1]. В свою чергу $V_m(x, y)$ являють собою ряди, складені з розв'язків (11) і (10), які в свою чергу може представити у вигляді лінійних комбінацій функцій $e^{\pm\lambda x} \sin ky$ і $e^{\pm\lambda x} \cos ky$ (як і розв'язок рівняння (4) [12]). При побудові розв'язка даної задачі використаємо дану структуру розв'язку. Розглянемо кожний доданок окремо.

Підставивши, наприклад $e^{\pm\lambda x} \sin ky$ в (11), отримуємо алгебраїчне рівняння, яке зв'язує λ з k :

$$\beta_3 k^4 + (\beta_5 - \beta_2 \lambda^2) k^2 + \beta_1 \lambda^4 - \beta_4 \lambda^2 = 0, \quad (12)$$

і з якого випливає, що кожному значенню $\pm\lambda$ відповідає чотири значення k , які можна подати у формі $\pm k_1(\lambda)$ і $\pm k_2(\lambda)$. Таким чином, частинний розв'язок рівняння (11), який відповідає, наприклад, додатному значенню λ має вигляд

$$V_1^* = e^{\lambda x} (S_1 \sin k_1 y + C_1 \cos k_1 y + S_2 \sin k_2 y + C_2 \cos k_2 y),$$

де C_m, S_m – довільні коефіцієнти.

Із співвідношення (10) випливає

$$V_2^* = e^{\lambda x} (S_1 \gamma_1 \sin k_1 y + C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + S_2 \gamma_2 \sin k_2 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y),$$

де $\gamma_m = 1 - \alpha_1 (\lambda^2 - \mu_1 k_m^2)$, $m = 1; 2$.

Будемо вважати, що загальні розв'язки рівнянь (3) і (4) мають точно задовольняти крайові умови на сторонах $y = 0$, $y = H_1$ і $y = H_2$ (5), а також при $y = h$ (9). Із перших двох умов (5) випливає $S_1 = S_2 = 0$. Враховуючи що дані частинні розв'язки справедливі і для від'ємних значень λ , частинні розв'язки можливо подати у вигляді.

$$V_1^* = [A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{ch} \lambda(x-L)] Y^{(1)}; V_2^* = [A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{ch} \lambda(x-L)] Y^{(2)};$$

$$Y^{(1)} = C_1 \cos k_1 y + C_2 \cos k_2 y; Y^{(2)} = C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y,$$

де A і B – довільні константи.

Частинні розв'язки рівняння Пуассона (4), які задовольняють крайові умови (5), мають вигляд

$$V_3^* = [A^{(3)} \operatorname{ch} \Lambda x + B^{(3)} \operatorname{ch} \Lambda(x-L)] \cos(\Lambda/\sqrt{\mu_1})(y-H),$$

$$V_4^* = [A^{(4)} \operatorname{ch} \Omega x + B^{(4)} \operatorname{ch} \Omega(x-L)] \cos(\Omega/\sqrt{\mu_2})(y-H),$$

де Λ , Ω – константи відокремлення змінних; A і B – довільні коефіцієнти.

Одновимірні розв'язки (3) і (4) мають вигляд [7]

$$W_m = A_0 x + B_0 + d_m \left(A_0^{(1)} \operatorname{ch} \left(x/\sqrt{\beta_4} \right) + B_0^{(1)} \operatorname{ch} \left((x-L)/\sqrt{\beta_4} \right) \right),$$

$$W_3 = a_0^{(1)}x + b_0^{(1)}, W_4 = a_0^{(2)}x + b_0^{(2)},$$

де $d_1 = 1$; $d_2 = -\alpha_1/\alpha_2$; $m = 1, 2$; A_0, B_0, a_0, b_0 – довільні константи.

Із умов (9) випливає

$$W_1 = W_3; W_2 = W_4; V_1^*(x, h) = V_3^*(x, h); V_2^*(x, h) = V_4^*(x, h),$$

$$\left. \frac{\partial V_1^*}{\partial y} \right|_{y=h} = \left. \frac{\partial V_3^*}{\partial y} \right|_{y=h}; \left. \frac{\partial V_2^*}{\partial y} \right|_{y=h} = \left. \frac{\partial V_4^*}{\partial y} \right|_{y=h}.$$

що дає змогу встановити наступне:

$$A_0^{(1)} = B_0^{(1)} = 0; a_0^{(m)} = A_0; b_0^{(m)} = B_0; A^{(k)} = C_k A; B^{(k)} = C_k B,$$

де C_3, C_4 – коефіцієнти, що зв'язують $A^{(k)}$ і $B^{(k)}$ з коефіцієнтами A і B . Відносно коефіцієнтів C_1, \dots, C_4 отримуємо систему однорідних лінійних рівнянь:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{C} = 0, \quad (13)$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & -c_3 & 0 \\ \gamma_1 c_1 & \gamma_2 c_2 & 0 & -c_4 \\ k_1 s_1 & k_2 s_2 & -\lambda \mu_1^{-0,5} s_3 & 0 \\ k_1 \gamma_1 s_1 & k_2 \gamma_2 s_2 & 0 & -\lambda \mu_2^{-0,5} s_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix},$$

$$c_m = \cos k_m h; s_m = \sin k_m h; c_{m+2} = \cos \frac{\lambda(h-H)}{\sqrt{\mu_m}}; s_{m+2} = \sin \frac{\lambda(h-H)}{\sqrt{\mu_m}}.$$

Система (13) має нетривіальний розв'язок, якщо

$$\det \mathbf{A}(\lambda) = 0. \quad (14)$$

Рівняння (14) має нескінчену множину дійсних коренів λ_n , яким відповідають $k_{m,n} = k_m(\lambda_n)$, $\gamma_{m,n} = \gamma_m(\lambda_n)$. Константи $C_{1,n}$, $C_{2,n}$, $C_{3,n}$, $C_{4,n}$ знаходяться з системи (13) з точністю до довільного множника.

Таким чином, переміщення U_1, \dots, U_4 можемо записати у формі

$$U_j = A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x)] Y_n^{(j)}(y), \quad (15)$$

$$j = 1, \dots, 4; X_n^{(1)} = \frac{\text{ch}(\lambda_n x)}{\lambda_n \text{sh}(\lambda_n L)}; Y_n^{(1)} = C_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \cos k_{2,n} y,$$

$$X_n^{(2)} = \frac{\text{ch}(\lambda_n(x-L))}{\lambda_n \text{sh}(\lambda_n L)}, Y_n^{(2)} = C_{1,n} \gamma_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \gamma_{2,n} \cos k_{2,n} y,$$

$$Y_n^{(3)} = C_{3,n} \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{\mu_1}}(y-H); Y_n^{(4)} = C_{4,n} \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{\mu_2}}(y-H),$$

де множники $\lambda_n \text{sh}(\lambda_n L)$ у знаменнику введені для покращення аналізу збіжності розв'язку.

Оскільки коефіцієнти $C_{1,n}$, $C_{2,n}$, $C_{3,n}$, $C_{4,n}$ визначені з точністю до

довільного множника, то для визначеності і покращення аналізу збіжності на дані коефіцієнти доцільно ввести додаткову умову нормування

$$\int_0^h [Y_n^{(1)}]^2 dx + \int_0^h [Y_n^{(2)}]^2 dx + \int_h^{L_1} [Y_n^{(3)}]^2 dx + \int_h^{L_2} [Y_n^{(4)}]^2 dx = 1.$$

Таким чином, крайові умови (5) и (9) задовольняються точно. А коефіцієнти A_0, A_n, B_0, B_n находимо з крайових умов (6)-(8). Вказані крайові умови приводять до рівнянь

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(1)} = 0; \quad A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(2)} = \frac{F_2(y)}{E_2 \delta_2}; \quad y \in (0; h);$$

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(3)} = 0; \quad A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(3)} = \frac{F_1(y)}{E_1 \delta_1}; \quad y \in (h; H);$$

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(4)} = \frac{F(y)}{E_2 \delta_2}; \quad A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(4)} = \frac{F_2(y)}{E_2 \delta_2}; \quad y \in (h; H);$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(1)} = 0; \quad A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(1)} = \frac{F_1(y)}{E_1 \delta_1}; \quad y \in (0; h);$$

Обмеживши додавання у рядах (15) деяким числом доданків N , запишемо перелічені крайові умови в векторній формі

$$A_0 \bar{\mathbf{H}} + \sum_{n=1}^N A_n \bar{\mathbf{W}}_n^{(1)}(y) + \sum_{n=1}^N B_n \bar{\mathbf{W}}_n^{(2)}(y) - \bar{\mathbf{R}} = 0, \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{W}}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Y_n^{(3)} \\ 0 \\ Y_n^{(4)} \\ Y_n^{(2)} \\ Y_n^{(1)} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{W}}_n^{(2)} = \begin{pmatrix} -Y_n^{(1)} \\ -Y_n^{(2)} \\ -Y_n^{(3)} \\ 0 \\ -Y_n^{(4)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2(y)/E_2 \delta_2 \\ 0 \\ F_1(y)/E_1 \delta_1 \\ F_2(y)/E_2 \delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ F_1(y)/E_1 \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Функції $Y_n^{(1)}, \dots, Y_n^{(4)}$ не є ортогональними на відповідних інтервалах, а їх системи є переповненими. Ця обставина дозволяє задовольнити незалежні крайові умови за допомогою коефіцієнтів A_0, B_0, A_n и B_n . Ці коефіцієнти находимо із умови ортогональності лівої частини рівняння (16) лінійно-незалежним векторам $\bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{W}}_n^{(1)}, \bar{\mathbf{W}}_n^{(2)}, n=1, \dots, N$. Для цього введемо скалярний добуток

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) &= \int_0^h u_1 v_1 dy + \int_0^h u_2 v_2 dy + \int_h^H u_3 v_3 dy + \int_h^H u_4 v_4 dy + \\ &+ \int_h^H u_5 v_5 dy + \int_h^H u_6 v_6 dy + \int_0^h u_7 v_7 dy + \int_0^h u_8 v_8 dy, \end{aligned}$$

де u_i и v_i – відповідні компоненти деяких векторів \vec{u} и \vec{v} .

Вказаний підхід призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(1,1)} & \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{M}^{(1,3)} \\ \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{M}^{(2,2)} & \mathbf{M}^{(2,3)} \\ \mathbf{M}^{(3,1)} & \mathbf{M}^{(3,2)} & \mathbf{M}^{(3,3)} \end{pmatrix} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(1)} \\ \mathbf{R}^{(2)} \\ \mathbf{R}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\vec{\mathbf{A}} = (A_0; B_0; A_1; \dots A_N; B_1; \dots B_N)^T,$$

$$M_{i,j}^{(1,1)} = (\vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{H}}); M_n^{(1,2)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(1)}, \vec{\mathbf{H}}); M_n^{(1,3)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(2)}, \vec{\mathbf{H}});$$

$$M_{k,n}^{(2,2)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(1)}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(1)}); M_{k,n}^{(2,3)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(2)}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(1)}); M_{k,n}^{(3,3)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(2)}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(2)});$$

$$\mathbf{M}^{(2,1)} = [\mathbf{M}^{(1,2)}]^T; \mathbf{M}^{(3,1)} = [\mathbf{M}^{(1,3)}]^T; \mathbf{M}^{(3,2)} = [\mathbf{M}^{(2,3)}]^T; i, j = 1, 2;$$

$$R_i^{(1)} = (\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{H}}^{(i)}); R_k^{(2)} = (\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(1)}); R_k^{(3)} = (\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(2)}); n, k = 1, \dots, N.$$

Модельна задача. Проведемо розрахунок напружено-деформованого стану клейового з'єднання двох однакових пластинок розмірами 5×4 см, ($2H=4$ см, $L=5$ см), и товщиною $\delta=4$ мм, $E_1=E_2=70$ ГПа, і $G_1=G_2=25,9$ ГПа (алюмінієвий сплав). Параметри клейового шару: $\delta_0=0,1$ мм, $G_0=0,5$ ГПа. Положимо, що до одного з шарів приложено рівномірне навантаження $F(y)=F=const$.

На рис. 2 показаний графік розподілу дотичних напружень в клейовому шарі, який має ширину $2h=3$ см. В силу симетрії показано напруження на половині області склейки, $x \in [0; L]$, $y \in [0; h]$.

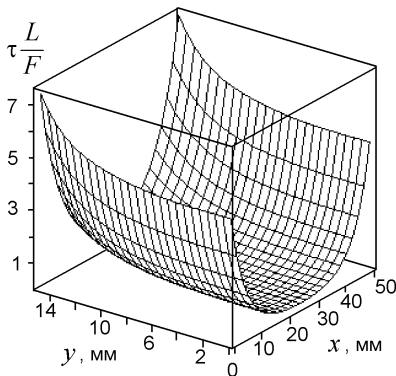


Рис. 2

З наведеного графіку видно, що напруження біля бічного краю перевищують напруження у середині клейового шару. Це зумовлено тим, що зусилля, які прикладені до пластинки поза межами клейового шару $y \in (h; H]$ передаються до іншої пластинки через найближчі ділянки клейового шару, а саме через область біля його бічного краю.

Коефіцієнти A_n и B_n в формулах (15) зменшуються с ростом індексу n не монотонно і залежать від кількості членів ряду N . Дані, наведені у табл. 1, ілюструють ці залежності. За розглянутих параметрах шарів і крайових умовах маємо $A_n = B_n$.

Таблиця 1

n	A_n		
	$N = 30$	$N = 60$	$N = 100$
0	$0,17857 \cdot 10^{-5}$	$0,17857 \cdot 10^{-5}$	$0,17857 \cdot 10^{-5}$
1	$0,93462 \cdot 10^{-11}$	$-0,24992 \cdot 10^{-11}$	$0,24109 \cdot 10^{-12}$
2	$0,25231 \cdot 10^{-6}$	$0,25233 \cdot 10^{-6}$	$0,25233 \cdot 10^{-6}$
3	$-0,32325 \cdot 10^{-10}$	$0,90986 \cdot 10^{-11}$	$-0,81125 \cdot 10^{-12}$
4	$0,24843 \cdot 10^{-6}$	$0,24842 \cdot 10^{-6}$	$0,24842 \cdot 10^{-6}$
5	$-0,45493 \cdot 10^{-7}$	$-0,45443 \cdot 10^{-7}$	$-0,45455 \cdot 10^{-7}$

Розрахунки показують, що за даних крайових умов деякі коефіцієнти зі зростанням N наближаються до нуля (наприклад A_1 , A_3), а деякі (наприклад A_0 , A_2 , A_4) залишаються практично незмінними.

Для верифікації запропонованої моделі проведено порівняння отриманих результатів з результатами розрахунків, виконаних за допомогою методу скінчених елементів у програмі Comsol Multiphysics. Трансверсальні переміщення зовнішніх сторін шарів дорівнюють нулю (вигин відсутній), переміщення в напрямку осі $0y$ у площині $x0z$ також нульові. Число елементів у створеній 3D моделі становить 1158516. Відносно мала товщина клейового шару зумовлює велику кількість скінчених елементів.

На рис. 3 показані графіки дотичних напружень, діючих в серединній площині клейового шару в напрямку осі x , вздовж ліній $y = 0$ (а) і $y = h$ (б), $x \in [0; L]$ (пунктирна лінія). Для порівняння наведені також графіки напружень (2), розрахованих за наведеною моделлю (неперервна лінія).

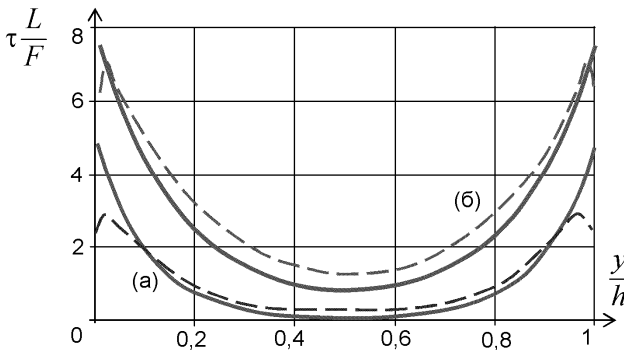


Рис. 3

Як бачимо, напруження доволі близькі. Біля краю шва дотичні напруження, розраховані за скінченноелементною моделлю зменшуються. Це є наслідком того, що зовнішній край клейового шару вільний від навантаження і напруження на його поверхні дорівнюють нулю. І в силу закону парності дотичних напружень напруження τ_{xz} на краях шва також є

відсутніми, а їх максимум розташований на відстані порядку товщини клейового шару від краю [14]. Слід також зауважити, що внаслідок деформацій зовнішніх шарів, зумовлених коефіцієнтами Пуассона, у клейовому шарі також виникають дотичні напруження у поперечному до навантаження напрямку (τ_{yz}). Але виконані розрахунки показують, що дані напруження в декілька разів менші за дотичні напруження у поздовжньому напрямку. А максимальні результуючі дотичні напруження у клейовому шарі, розраховані за скінченноелементною моделлю мало відрізняються і не перевищують максимальних напружень, розрахованих за допомогою запропонованої наближеної моделі.

Висновок. Запропоновано спрощену двовимірну математичну модель напускного клейового з'єднання і отримано аналітичний розв'язок задачі про напружений стан з'єднання прямокутних пластин, яке має області непоклею з бічних сторін клейового шва. На прикладі модельної задачі показано, що наявність дефекту з бічної сторони області склейки значно збільшує напруження в кутових областях клейового шару. Запропонована модель може бути розвинена на врахування вигину в площині з'єднання, використана для розрахунку з'єднань внапуск силових елементів конструкції з обшивкою, розрахунку напружень в зоні з'єднань елементів інтегральних композитних конструкцій і т.д.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Spelt J.K.* Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey // *Int. J. Adhes. Adhesiv.* – 2009, - V. 29, P. 319-330.
2. *Рыбенков Н.Г., Артохин Ю.П.* Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин // *Исслед. по теор. пластин и оболочек, Изд-во Казанского ун-та.* – 1981, №16, с. 82–90.
3. *Vihak V., Tokoyvi Y., Rychahivskyy A.* Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region // *Journal of Computational and Applied Mechanics* 3 (2), P. 193-206.
4. *Rapp P.* Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends // *Archives of Civil and Mechanical Engineering.* – 2015, - V. 15. – 1. 2, -P. 603–619.
5. *Barut A., Hanauska J., Madenci E., Ambur D.R.* Analysis method for bonded patch repair of a skin with a cutout // *Composite Structures.* – 2002, - I. 88, V.55, - P. 277-294.
6. *A. Chukwujekwu Okafor, Singh N., Enemuoh U.E., Rao S.V.* Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels // *Composite Structures.* – 2005, V. 71, P. 258–270.
7. *Kurenkov S.S.* A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load // *Mechanics of Composite Materials.* September. – 2015, V. 51, I. 4, P. 479-488.
8. *Куреннов С.С. Танчик Е.В.* Расчет напряженного состояния клевого соединения прямоугольных пластинок разной ширины // *Вест. Моск. авиац. ин-та.* – Т. 22, №2. – М., 2015. – С. 162–169.
9. *Куреннов С.С.* Напряженное состояние пластинок разной ширины. Приближенная теория и эксперимент // *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей.* – 2017, № 1, – С. 235–244.
10. *Shishesaz M., Bavi N.* Shear stress distribution in adhesive layers of a double-lap joint with void or bond separation // *J. of Adhesion Science and Technology.* – 2013, V.27, №11, P. 1197–1225.
11. *Olia, M. Rossettos N.* Analysis of adhesively bonded joints with gaps subjected to bending // *Int. J. Solids and Structures.* - 1996, V. 33, №18, P. 2681-2693.
12. *Васильев В.В., Боков Ю.В.* Исследования напряженного состояния клевого соединения композиционного материала с металлическим листом // *Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов.* – М.: ЦАГИ, –1979. – Вып. 7. – С. 4 – 10.
13. *Васильев В.В., Журье С.А.* О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы // *Изв. РАН. МТТ.* 2013. № 4. С. 40-49.

14. Frostig Y., Thomsen O. T., Mortensen F. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet—high-order theory approach // *J. of Engineering Mechanics*. – 1999, V. 125, P. 1298–1307.

REFERENCES

1. da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Speltz J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey // *Int. J. Adhes. Adhesiv.* – 2009, - V. 29, P. 319-330.
2. Ryabenkov N.G., Artyuhin Yu.P. Opredelenie napryazheniy kleya v soedinenii dvuh polubeskonechnykh plastin (Determination of adhesive stresses in the joint of two semi-infinite plates) // *Issled. po teor. plastin i obolochek, Izd-vo Kazanskogo un-ta.* – 1981, №16, P. 82–90.
3. Vihak V., Tokovyy Y., Rychahivskyy A. Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region // *Journal of Computational and Applied Mechanics* 3 (2), P. 193-206.
4. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. – 2015, - V. 15. – I. 2, -P. 603–619.
5. Barut A., Hanauska J., Madenci E., Ambur D.R. Analysis method for bonded patch repair of a skin with a cutout // *Composite Structures*. – 2002, - I. 88, V.55, - P. 277-294.
6. A. Chukwujeoku Okafor, Singh N., Enemuoh U.E., Rao S.V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels // *Composite Structures*. – 2005, V. 71, P. 258–270.
7. Kurennov S.S. A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load // *Mechanics of Composite Materials*. Septembe. – 2015, V. 51, I. 4, P. 479-488.
8. Kurennov S.S. Tanchik E.V. Raschet napryazhennogo sostoyaniya kleevogo soedineniya pryamougolnykh plastinok raznoy shiriny (Calculation of the stressed state of the glued joint of rectangular plates of different widths) // *Vest. Mosk. aviats. in-ta.* – T. 22, №2. – M., 2015. – P. 162–169.
9. Kurennov S.S. Napryazhennoe sostoyanie plastinok raznoy shiriny. Priblizhennaya teoriya i eksperiment (Stress state of plates of different widths. Approximate theory and experiment) // *Visnik Zaporizkogo natsionalnogo univrsitetu: Zbirnik naukovih statey.* – 2017, № 1, – P. 235–244.
10. Shishesaz M., Bavi N. Shear stress distribution in adhesive layers of a double-lap joint with void or bond separation // *J. of Adhesion Science and Technology*. – 2013, V.27, №11, P. 1197–1225.
11. Olia, M. Rossetto N. Analysis of adhesively bonded joints with gaps subjected to bending // *Int. J. Solids and Structures*. - 1996, V. 33, №18, P. 2681-2693.
12. Vasilev V.V., Bokov Yu.V. Issledovaniya napryazhennogo sostoyaniya kleevogo soedineniya kompozitsionnogo materiala s metalicheskim listom (Investigations of the stressed state of the adhesive bonding of a composite material with a metal sheet) // *Proektirovanie, raschet i ispytaniya konstruktivnykh iz kompozitsionnykh materialov.* – M.: TsAGI, –1979. – № 7. – P. 4 – 10.
13. Vasilev V.V., Lure S.A. O singulyarnosti resheniya v ploskoy zadache teorii uprugosti dlya konsolnoy polosy (On the singularity of the solution in the plane elasticity problem for the console strip) // *Izv. RAN. MTT*. 2013. № 4. - P. 40-49.
14. Frostig Y., Thomsen O. T., Mortensen F. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet—high-order theory approach // *J. of Engineering Mechanics*. – 1999, V. 125, P. 1298–1307.

Стаття надійшла 07.05.2018

Kurennov S.S.

STRESS CONDITION OF GLUED JOINT WITH LONG-TERM DEFECT

Here a simplified two-dimensional model of overlapping adhesive joint is proposed. The transverse displacements of the bearing layers are assumed to be zero. The stresses are assumed to be distributed uniformly over the thickness of the layers. The adhesive layer only works in shear, i.e. bending of the joint is absent. These simplifications make it possible to obtain an analytical solution of the problem. Here the stressed state problem of the adhesive joint of two variable thickness rectangular plates is solved, this joint has defects in the adhesive layer along the lateral sides. It is assumed that the joint has symmetry relative to the longitudinal axis. The problem is reduced to the second-order partial differential equations system relative to the longitudinal displacements of the outer bearing layers. The solution constructed by the variables separation method is an eigenfunctional series. The boundary conditions at the joint symmetry axis, at the lateral sides, at the edge of the glued area and bearing layers beyond of the adhesive layer (i.e., at the edge of the glued and not glued area) are exactly satisfied. The boundary conditions at the plates ends are satisfied by orthogonalization of the residual to a system of eigenfunctions. The eigenfunctions are not orthogonal. The orthogonalization of the residual leads to a linear equations system relative to the unknown coefficients of the functional series.

It is proved that the solution of the system can be obtained by the reduction method. The model problem is solved. Here is investigated the influence of the solution series terms number on the values of the

coefficients entering into the solution. Mechanical effects are investigated, and it is shown that the defects in the adhesive layer can significantly increase the stresses at the edge of the adhesive layer. The comparison of the numerical results with the results obtained by finite element method is made. It is shown that the proposed approach to the problem has an accuracy, sufficient for the design problems.

Key words: glued joint, analytical solution, two dimensional model, separation of variables.

Куреннов С. С.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ С ПРОДОЛЬНОМ ДЕФЕКТОМ

Перемещение элементов внешних несущих слоев в поперечном направлении считаются равными нулю. Задача сведена к системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно продольных перемещений слоев, решение которой строится при помощи метода разделения переменных. Решена модельная задача. Показано, что отсутствие клея вдоль боковой стороны соединения может в значительной степени увеличивать напряжение у края клеевого слоя.

Ключевые слова: клеевое соединение, аналитическое решение, двумерная модель, разделение переменных.

УДК 624.078.4+539.3

Куреннов С. С. **Напружений стан клеєвого з'єднання з поздовжнім дефектом** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 94-104.

В наближеній двовимірній постановці за допомогою методу відокремлення змінних розв'язана задача про напружений стан клеєвого з'єднання з поздовжнім дефектом у клеєвому шарі.

Табл. 1. Ил. 3. Бібліогр. 14 назв.

UDC 624.078.4+539.3

Kurennov S.S. **Stress condition of glued joint with long-term defect** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 94-104. – Ukr.

In the approximate two-dimensional formulation with the help of the method of separating the variables, the problem of the stress state of the adhesive bond with the longitudinal defect in the adhesive layer is solved.

Tabl. 1. Fig. 3. Ref. 14.

УДК 624.078.4+539.3

Куреннов С. С. **Напряженное состояние клеєвого соединения с продольным дефектом** // Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. – Вип. 100. – С. 94-104. – Укр.

В приближенной двумерной постановке при помощи метода разделения переменных решена задача о напряженном состоянии клеєвого соединения с продольным дефектом в клеєвом слое.

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр. 14 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор кафедри вищої математики Національного аерокосмічного університету ім. М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»

E-mail: kurennov.ss@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3835-3288>

УДК 624.04:519.853:519.688

НЕЛІНІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТОПОЛОГІЇ ПРОСТОРОВИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

Є.А. Єгоров,

д-р техн. наук, професор

О.Є. Кучеренко,

аспірант

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, м. Дніпро

Розглядається задача оптимізації топології просторової стержневої системи. Наведена модифікована напіввизначена задача математичного програмування, яка доповнюється додатковими інженерно-технічними критеріями, що висуваються до конструкції нормами проектування. Запропоновано алгоритм кусково-лінійної апроксимації, що дозволяє на основі площі перерізу стержня визначати необхідні для розрахунку геометричні характеристики, наведено алгоритм визначення форми перерізу стержня. Пропонується узагальнена схема розв'язання задачі оптимізації топології стержневої системи, наводяться приклади розв'язання оптимізаційної задачі для структурної плити.

Ключові слова: топологія, оптимізація, стержнева система, структурна плита, момент інерції, кусково-лінійна апроксимація, стійкість.

Вступ. Ефективність просторових стержневих систем, які знайшли широке застосування в будівництві, в значній мірі залежить від правильно обраної конструктивної схеми, інакше кажучи - топології. У свою чергу задача визначення раціональної топології просторової системи нерозривно пов'язана з проблемою зниження матеріаломісткості та забезпечення надійності функціонування конструкції. Зазвичай роботи, що існують в галузі оптимального проектування, або досліджують суцільно математичну сторону оптимізаційної задачі, або обмежуються розв'язанням інженерних прикладних задач. До першої групи можна віднести роботи Н.В. Банічука, Т. Такади, А. Бен-Талія. Так, в [1] аналітично розв'язується задача оптимального проектування у вигляді функціоналів. В [2] автор розглядає задачу оптимізації топології з позицій лінійного програмування, а в роботі [3] проводиться аналіз та обґрунтування проблеми оптимізації стержневих систем, яка представлена як задача напіввизначеного програмування.

З другої групи можна виділити роботи В.Б. Гриньова, А.В. Перельмутера, В.О. Пермякова, В.В. Трофимовича, С.Ф. Пічугіна. В [4] автор, наприклад, розглядає оптимізацію елементів конструкцій за спектром власних частот. В [5] автори наводять практичні методи розв'язання деяких оптимізаційних задач. В [6] серед іншого розглядається оптимізація попередньо напружених металевих конструкцій, а в [7] використовується імовірнісні методи для підбору характеристик сталевих балок.

В зазначених вище роботах можна відмітити такі особливості: загальні оптимізаційні методи малозастосовні при розв'язуванні реальних технічних задач, а частковий інженерний підхід зазвичай не забезпечує оптимального розв'язку. В більшості випадків це зводить нанівець всі зусилля з побудови ефективної конструктивної схеми.

В цій роботі пропонується алгоритм оптимізації топології просторових стержневих систем, який дозволяє поєднати математичну оптимізаційну схему з інженерними задачами, зокрема з нормативними вимогами до міцності та стійкості, а також до конкретної конфігурації перерізів кожного конструктивного елемента. Ціль оптимізаційного алгоритму - мінімізація матеріаломісткості при забезпеченні виконання нормативних вимог. У відповідності до [8], витрати на матеріали можуть сягати 73% вартості металеві конструкції, тому розв'язання такої задачі є актуальною проблемою.

1. Постановка задачі. Проблема оптимізації топології просторової стержневої системи - складна багатокритеріальна задача, яку умовно можна подати за допомогою функціоналів [1]:

$$\{J_v, J_u, -J_\sigma\} \rightarrow \min, \quad (1)$$

де J_v - інтегральний функціонал об'єму, J_u - локальний функціонал жорсткості, J_σ - локальний функціонал міцності. Функціонал жорсткості пов'язаний із зсувом вузлів стержневої системи, а отже - і з енергією стержневої системи. Гіпотеза полягає у тому, що мінімізація енергії системи веде до жорсткої геометрично незмінної конструктивної схеми.

Зазвичай проблему оптимізації топології стержневої системи можна записати як задачу опуклого програмування у напіввизначеній формі:

$$\text{minimize}_{w,v} W$$

$$\sum_{i=1}^m v_i \leq V, v_i \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} W & F^T \\ F & \sum_{i=1}^m \frac{E_i v_i}{L_i^2} p_i p_i^T \end{pmatrix} \geq 0.$$

Тут W - верхня оцінка величини енергії пружної деформації стержневої системи; v_i - об'єм стержня; F - зовнішні сили, прикладені до вузлів конструкції; E_i - модуль Юнга; L_i - довжина стержня; p_i - стовпець матриці P , яка входить у рівняння балансу сил $Pf - F = 0$.

Варто відзначити, що у такій постановці задача має суттєвий недолік: необхідно заздалегідь знати значення параметру V , який пов'язаний із інтегральним функціоналом об'єму та локальним функціоналом міцності. При зміні величини V доводиться наново розв'язувати задачу (2), що у випадку розрахунків просторових стержневих систем з великою кількістю скінчених елементів призводить до невиправданих витрат машинного часу. Це викликає необхідність у модифікації задачі (2) з тим, щоб а) забезпечити її інтеграцію з інженерно-технічними критеріями; б) знизити ресурсомісткість обчислень.

2. Модифікована напіввизначена оптимізаційна задача. Умову

$$\sum_{i=1}^m v_i \leq V \text{ можна замінити більш жорсткою умовою } \sum_{i=1}^m v_i = 1, \text{ яка значно}$$

взвужує область пошуку. Тоді оптимізаційна задача математичного програмування набуває такого вигляду:

$$\text{minimize}_{w,v} W$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = 1, v_i \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} W & F^T \\ F & \sum_{i=1}^m \frac{E_i v_i}{L_i^2} P_i P_i^T \end{pmatrix} \geq 0.$$

З позицій опуклої оптимізації ця заміна цілком правомірна, адже функції, що входять у задачу, залишаються опуклими. Розв'язком оптимізаційної задачі (3) буде співвідношення між об'ємами стержнів системи $v_1:v_2:\dots:v_m$. Застосовуючи умови Каруша-Куна-Такера до такої задачі, можна виразити об'єм стержня у замкненому вигляді:

$$t_i = V \cdot v_i = V \sqrt{L_i^2 f_i^2 / E_i} / \sum_{j=1}^m \sqrt{L_j^2 f_j^2 / E_j}. \quad (4)$$

Пошук параметру V здійснюється в ітераційному режимі, виходячи із додаткових інженерно-технічних критеріїв та умов.

3. Апроксимація геометричних характеристик перерізу стержня.

Перш ніж перейти до розгляду інженерно-технічних критеріїв, необхідно розв'язати задачу апроксимації моментів інерції перерізу стержня по його площі. Ця задача має ключове значення при розрахунках на стійкість, зокрема, побудова матриці жорсткості здійснюється саме на основі обчислених значень моментів інерції.

Для простих перерізів типу «коло», «квадрат» визначення моментів інерції - тривіальна задача, що розв'язується за допомогою добре відомих формул. Залежність моментів інерції від площі для різноманітних складних перерізів не така проста, так як одній площині перерізу може відповідати багато моментів інерції. Відповідно до Адамара, задача є коректною, якщо відповідає таким умовам:

1. Задача має розв'язок.
2. Існує тільки один розв'язок.
3. Розв'язок безперервно залежить від умов задачі.

Задача визначення моментів інерції плоского перерізу за його площею порушує як мінімум другу умову, а отже, є некоректною. Розв'язання подібних - некоректних - задач можна здійснити кількома шляхами, наприклад, за допомогою таких методів машинного навчання як нейронні мережі [9]. Використовується і регуляризація, яка дозволяє застосовувати додаткову інформацію для розв'язання некоректної задачі. При апроксимації моментів інерції плоского перерізу у якості додаткової інформації можна використовувати табличні дані із сортаменту.

З погляду статистики вкрай малоймовірно, щоб при розв'язанні опуклої оптимізаційної задачі виходили точні числа із сортаменту: обчислені площі стержнів практично завжди будуть перебувати в деякому інтервалі (A_i, A_{i+1}) , де A_i, A_i і A_{i+1} - площі стержнів із сортаменту, яким відповідають

плоскі моменти інерції I_i і I_{i+1} . Виходячи з вищезазначених міркувань, можна виконати кусково-лінійну апроксимацію моментів інерції, припускаючи на малому інтервалі (A_i, A_{i+1}) лінійну залежність між плоским моментом інерції й площею перерізу. Тоді для $A \in (A_i, A_{i+1})$ матимемо:

$$I = \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} A + I_i - \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} A_i = I_i + \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} (A - A_i). \quad (5)$$

Якщо обчислення проводити паралельно для кількох сортментів, то також можна визначити й оптимальну геометрію перерізу за наступним алгоритмом:

Вхід: $S=(S_1, \dots, S_n)$ - таблиці формату (A, I) ; A - площа стержня.

Для S_j :

Знайти інтервали $(A_{j1}, A_{j2}), (I_{j1}, I_{j2})$.

Розв'язати рівняння (5).

Якщо нове значення I більше за попереднє, то

Запам'ятати j, I .

КінецьДля.

Вивід j, I .

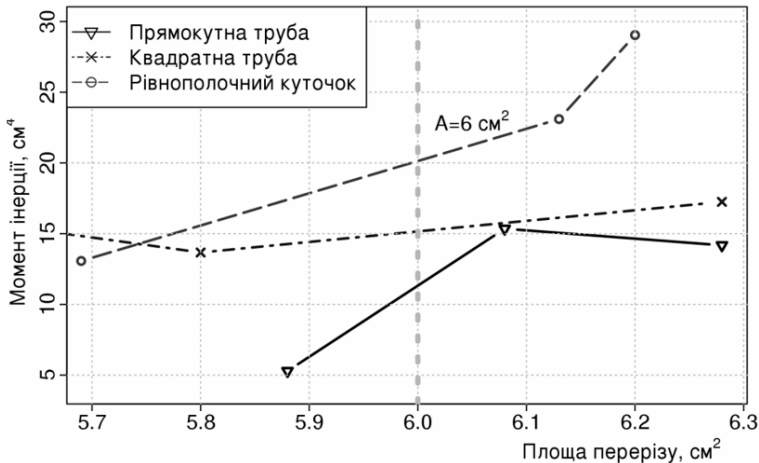


Рис. 1. Залежність моментів інерції від площі

На рис. 1 проілюстровано цю ідею: для площі $A=6 \text{ см}^2$ оптимальним перерізом буде рівнополичний куточок. Тоді, використовуючи (5), отримаємо момент інерції:

$$I = 13.07 + \frac{23.1 - 13.07}{6.13 - 5.69} (6 - 5.69) = 20.14 \text{ см}^4.$$

4. Додаткові умови і об'єм стержневої системи. Додаткові умови та критерії, такі як міцність та стійкість, дозволяють визначити кінцевий об'єм матеріалу V , який буде витрачено на виготовлення конструкції. Умову міцності запишемо у відповідності до [10]:

$$\frac{N}{A} \leq \frac{\gamma_c R}{\gamma_n}, \quad (6)$$

де N – сила, що діє на стержень; γ_c - коефіцієнт умов роботи; γ_n - коефіцієнт надійності за призначенням; R – розрахунковий опір матеріалу; A – площа перетину стержня.

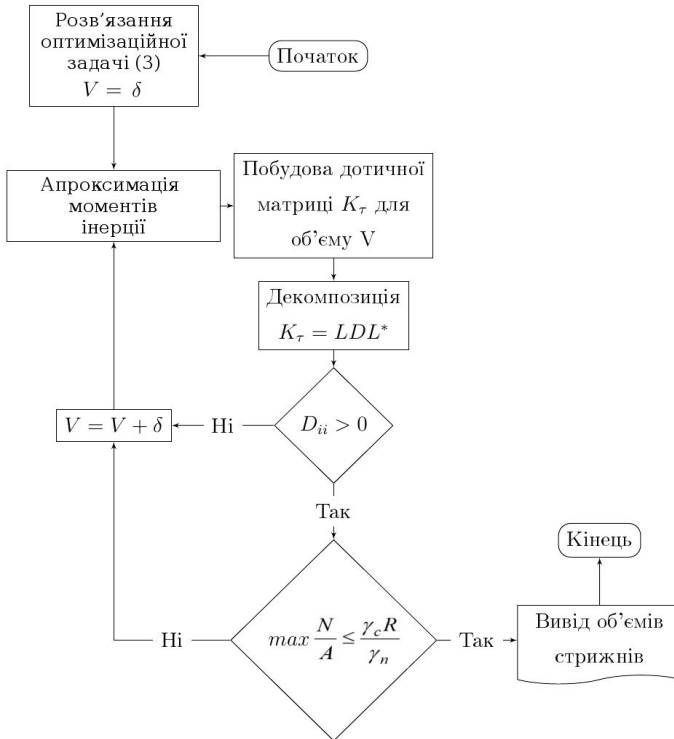


Рис. 2. Узагальнений алгоритм розв'язання оптимізаційної задачі.

Але норми проектування не містять точних рекомендацій щодо розрахунків на стійкість просторових систем. В цьому випадку доцільно використовувати скінчено-елементний підхід, сутність якого полягає у побудові дотичної матриці жорсткості K_τ з наступним її розкладом за Холецьким:

$$K_\tau = LDL^T, \quad (7)$$

де L - нижня трикутна матриця; D - діагональна матриця. Якщо елементи на головній діагоналі матриці D більші 0, то вважається, що система знаходиться у стабільній рівновазі. Для визначення загального об'єму стержневої системи V пропонується алгоритм, який наведено на рис. 2. Тоді об'єм кожного стержня обчислюється як $t_i = v_i \cdot V$.

5. Приклад оптимізації топології структурної плити. Розглянемо базову просторову структуру 9 м x 8 м x 2 м, наведену на рис. 3.

Стосовно такої структури розв'яжемо задачу (3) для двох випадків: 1) нерухомі опори у кутах структури (вузли 1, 4, 17, 20); 2) нерухомі опори у вузлах 1, 4, 9, 12, 17, 20. Поверхнєве навантаження на структуру дорівнює 10 кН/м^2 .

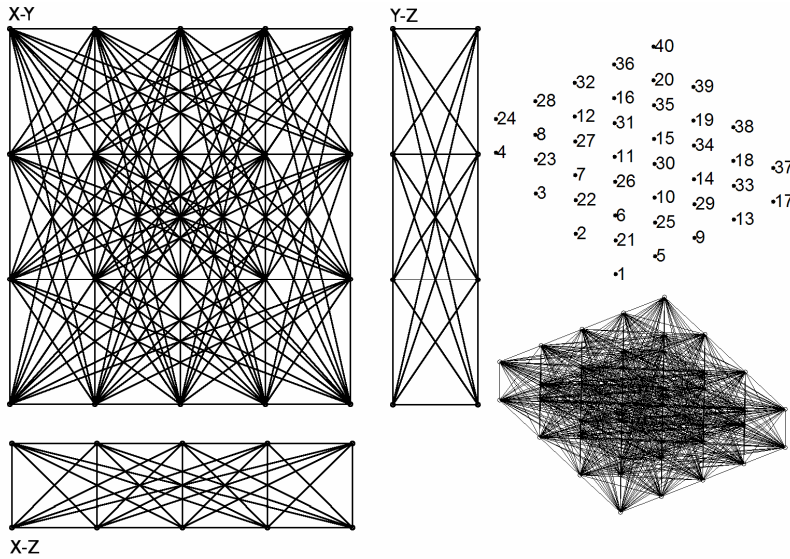


Рис. 3. Базова структура - проєкції, вузли, повний граф

Розв'язання задачі (3) веде відповідно до двох варіантів конструктивної схеми (рис. 4). Буквами вказані визначені за наведеним у 3 розділі алгоритмом перерізи: Н - двотавр, СТУБЕ - труба, НРЕС - прямокутна труба. На рис. 5 зображені конструктивні схеми з опорами та навантаженнями, що прикладені до вузлів систем. Варто відзначити, що незначна зміна у розташуванні опор має наслідком кардинальні зміни у топології та параметрів стержнів, що відображає значну чутливість до початкових умов.

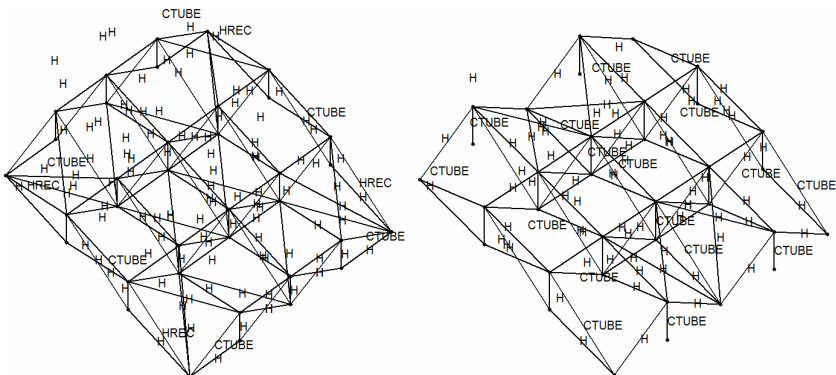


Рис. 4. Розв'язок задачі (3) для двох варіантів розташування опор.

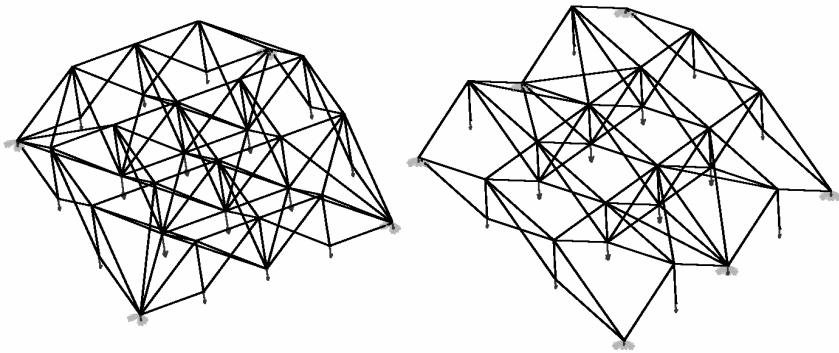


Рис. 5. Моделі просторових структур з навантаженнями

Загальна маса конструкцій за першим варіантом (опори по 4-х кутах) складає 674 кг. У другому варіанті розміщення опор маса конструкцій дорівнює 544 кг. Це підтверджує ідею, наведену у [11], що при розміщенні опор тільки по кутах структурної плити значно збільшуються витрати металу.

Висновки. Наведена модифікована форма напіввизначеної задачі оптимізації топології стержневої системи дозволяє інтегрувати оптимізаційну задачу з базовими інженерними критеріями та допомагає уникнути зайвих обчислень при розв'язуванні складних просторових систем. Запропонована узагальнена схема розв'язання оптимізаційної задачі об'єднує математичний та інженерний підходи до оптимального проектування просторових стержневих систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. - М. : Наука, 1986. - 303 с.
2. Takada T. Multiobjective optimization of truss topology by linear/sequential linear programming method. - Journal of Mechanical Engineering and Automation. - 2012. - Vol. 2. - P.585-593.
3. Ben-Tal A., Nemirovski A. Robust truss topology design via semidefinite programming. - SIAM Journal on optimization. - 1997. - Vol. 7. - No. 4. - P.991-1016.
4. Гринев В. Б. Оптимизация элементов конструкции по механическим характеристикам. - К. : Наук. думка, 1975. - 294 с.
5. Пермяков В.А., Перельмутер А.В., Юрченко В.В. Оптимальное проектирование стальных стержневых конструкций. - К. : Сталь, 2008. - 538 с.
6. Трофимович В.В., Пермяков В.А. Оптимизация металлических конструкций. - К. : Вища шк., 1983. - 199 с.
7. Пичугін С.Ф., Махінко А.В. Імовірнісна процедура підбору поперечного перерізу сталевих прогонів за критерієм міцності і жорсткості. - Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. - 2003. - №10. - С. 155-163.
8. Беленя Е.И., Гениев А.Н., Балдин В.А. Металлические конструкции. - М. : Стройиздат, 1985.
9. Andolfatto L., Thiebaud F., Douill M., Lartigue C. On Neural Networks Ability to Approximate Geometrical Variation Propagation in Assembly. 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing. - 2013. - P. 224-232.
10. ДБН В.2.6-198:2014. Сталеві конструкції. Норми проектування. - К. : Мікрореґіон України, 2014. - 199 с.
11. Никитюк А.В., Московкина А.А., Зуева И.И. Достоинства и недостатки структурных конструкций. - Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. - 2011. - №1. - С.99-104.

REFERENCES

1. *Banichuk N.V.* Vvedenie v optimizaciju konstrukcij (Introduction to Structural Optimization). Moscow : Nauka, 1986, 303 pp.
2. *Takada T.* Multiobjective optimization of truss topology by linear/sequential linear programming method. Journal of Mechanical Engineering and Automation, 2012, Vol. 2, P.585-593.
3. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Robust truss topology design via semidefinite programming. - SIAM Journal on optimization, 1997, Vol. 7, No.4, P.991-1016.
4. *Grinev V.B.* Optimizacija elementov konstrukcii po mehanicheskim karakteristikam (Optimization of structural elements by mechanical characteristics). Kyiv : Naukovadumka, 1975, 294 pp.
5. *Permjakov V.A., Perelmuter A.V., Jurchenko V.V.* Optimalnoe proektirovanie stalnyh stержnevnyh konstrukcij (Optimal design of steel trusses). Kyiv : Stal, 2008, 538 pp.
6. *Trofimovich V.V., Permjakov V.A.* Optimizacija metallicheskih konstrukcij (Optimization of metal structures). Kyiv : Vishha shk., 1983, 199 pp.
7. *Pichugin S.F., Mahinko A.V.* Imovirnisna procedura pidboru poperechnogo pererizu stalevih progoniv za kriteriem micnosti i zhorstkosti (Probabilistic procedure for cross-section selecting of steel runs by strength and rigidity criterion). Resursoekonomni materiali, konstrukcii, budivlva ta sporudi, 2003, No.10, P.155-163.
8. *Belenja E.I., Geniev A.N., Baldin V.A.* Metallicheskie konstrukcii (Metal constructions). Moscow : Strojizdat, 1985.
9. *Andolfatto L., Thiebaut F., Douill M., Lartigue C.* On Neural Networks Ability to Approximate Geometrical Variation Propagation in Assembly. 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, 2013, P.224-232.
10. DBN V.2.6-198:2014. Stalevi konstrukcii. Normi proektuvannja (Steel structures. Design standards). Kyiv : Minregion Ukrainy, 2014, 199 pp.
11. *Nikitjuk A.V., Moskovkina A.A., Zueva I.I.* Dostoinstva i nedostatki strukturyh konstrukcij (Advantages and disadvantages of structural constructions). Vestnik PNIPU. Stroitelstvo i arhitektura, 2011, No.1, P.99-104.

Стаття надійшла 07.05.2018

Egorov E.A., Kucherenko A.E.

NONLINEAR TOPOLOGY OPTIMIZATION OF SPACE TRUSS-LIKE STRUCTURES

The paper considers the problem of topology optimization of space truss-like structures. The proposed algorithm combines convex optimization problem with non-convex conditions. The purpose of the algorithm is to minimize the mass of the space structure according to such non-convex conditions as structural safety requirement and buckling.

In general the problem can be specified as multicriteria optimization task as follows:

$$\{J_v, J_u, -J_\sigma\} \rightarrow \min,$$

where J_v is a functional of volume, J_u is a functional of stiffness, J_σ is a functional of strength. The stiffness functional can be defined by the means of nodes displacements and the energy of the system. The hypothesis is that that truss compliance minimization leads to the invariable structure topology. Here we use the modified semidefinite optimization problem (SDP) which can be written as follows:

$$\text{minimize}_{w,v} W$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = 1, v_i \geq 0, i = 1, \dots, m$$

$$\begin{pmatrix} W & F^T \\ F & \sum_{i=1}^m \frac{E_i v_i}{L_i^2} p_i p_i^T \end{pmatrix} \geq 0.$$

Solution of the semidefinite optimization problem defines the relation between the beams volumes v_1, v_2, \dots, v_m . The volume of each beam can be defined as $t_i = V \cdot v_i$ where V can be obtained from additional conditions.

The next important step is approximation of geometric characteristics of the cross-section. We need area moments of inertia to assemble stiffness matrix of the structure. This matrix plays a key role in defining of buckling conditions. For simple cross-sections such as "solid circular", "square" calculation of moments of inertia is a trivial problem solved via well-known formulas. For complex cross-sections the dependence of moments of inertia on area is not so simple and may be considered as an ill-posed problem. According to Hadamard, the problem is well-posed if it meets the following requirements: a) the problem has a solution; b) there is only one solution; c) the solution continuously depends on the initial conditions. Solving of ill-posed problems can be done with machine learning techniques (e.g., neural networks). Also we can use regularization to get the most probable solution. In case of approximation of moment of inertia we can use additional information from assortment tables of beams. The calculated area of the beam will almost always be in a certain interval (A_i, A_{i+1}) , where A_i and A_{i+1} are the areas from the assortment table of beams with corresponded moments of inertia I_i and I_{i+1} . Assuming a linear relationship in a narrow interval, it is possible to perform a piecewise linear approximation of moments of inertia. Thus, we have:

$$I = \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} A + I_i - \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} A_i = I_i + \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} (A - A_i).$$

Using several tables it is possible to obtain optimal cross-section geometry with the following algorithm:

Input: $S=(S_1, \dots, S_n)$ - table of (A, I) ; A - area of the beam

For S_j :

Find interval $(A_{j1}, A_{j2}), (I_{j1}, I_{j2})$

Approximate moments of inertia I_{new}

If $I_{new} > I_{old}$ **Then** Save j, I_{new}

EndFor

Output j, I

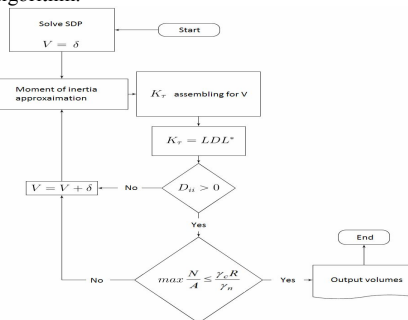
Additional conditions and criteria such as buckling allow us to determine the total volume of material V that we need for the structure. The condition of structural safety requirement can be written in a standard form as follows:

$$\frac{N}{A} \leq \frac{\gamma_c R}{\gamma_n}$$

The next step is to define tangent stiffness matrix K_τ of the structure using approximated moments of inertia. This matrix can be decomposed as follows:

$$K_\tau = LDL^T,$$

where L is a lower unit triangular (unitriangular) matrix and D is a diagonal matrix. If the entries on the main diagonal of matrix D are greater than zero then the structure is stable. To determine the total volume V we propose the algorithm:



The volume of any beam can be calculated as $t_i = v_i V$.

For illustration we applied the algorithm for optimization of space truss topology. We used a ground structure with dimensions $9\text{ m} * 8\text{ m} * 2\text{ m}$ with 40 key points. We explored two cases: 1) with 4 hinged supports; 2) with 6 hinged supports. Solving of semidefinite optimization problem leads to the cases with masses 674 kg and 544 kg respectively. This reflects significant sensitivity to initial conditions.

Keywords: topology, optimization, truss, structural plate, moment of inertia, piecewise linear approximation, buckling.

Егоров Е.А., Кучеренко А.Е.

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача оптимизации топологии пространственной стержневой системы. Приведена модифицированная полуопределенная задача математического программирования, которая дополнена дополнительными инженерно-техническими критериями, предьявляемыми к конструкции нормами проектирования. Предложен алгоритм кусочно-линейной аппроксимации, позволяющий на основе площади сечения стержня определять необходимые для расчета геометрические характеристики; приведен алгоритм определения формы сечения стержня. Предлагается обобщенная схема решения задачи оптимизации топологии стержневой системы, приводятся примеры решения оптимизационной задачи для структурной плиты.

Ключевые слова: топология, оптимизация, стержневая система, структурная плита, момент инерции, кусочно-линейная аппроксимация, устойчивость.

УДК 624.04:519.853:519.688

Егоров С.А., Кучеренко О.Є. **Нелінійна оптимізація топології просторових стержневих систем** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 105-114.

Розглядається задача оптимізації топології просторових стержневих систем, яка наводиться у формі задачі математичного програмування та доповнена додатковими умовами.

Ил. 5. Библиогр. 11 назв.

Egorov E.A., Kucherenko A.E. **Nonlinear topology optimization of space truss-like structures** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 105-114.

The space truss-like structure topology optimization task is considered as a task of mathematical programming which has been supplemented by additional conditions.

Fig. 5. Ref. 11.

Егоров Е.А., Кучеренко А.Е. **Нелинейная оптимизация топологии пространственных стержневых систем** // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. - Вип. 100. - С. 105-114.

Рассматривается задача оптимизации топологии пространственных стержневых систем, которая представляется в форме задачи математического программирования и дополнена дополнительными условиями.

Ил. 5. Библиогр. 11 назв.

Автор (научовий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри металевих конструкцій ЄГОРОВ Євген Аркадійович.

Адреса робоча: 49600. м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури", ЄГОРОВ Євген Аркадійович.

Мобільний тел.: +380679451816

E-mail: evg_egorov@ukr.net

<http://orcid.org/0000-0003-2993-0570>

Автор (научовий ступінь, вчене звання, посада): аспірант кафедри металевих конструкцій Кучеренко Олександр Євгенович.

E-mail: akch7@cryptolab.net

УДК 539.3

ЗМІШАНИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ ФУНКЦІОНАЛ В ЗАДАЧАХ ПОВЗУЧОСТІ ТА ПОШКОДЖУВАНОСТІ СТЕРЖНІВ ПРИ ЗГІНИ

О.Б. Савін,

канд. техн. наук, доцент

В.М. Соболев,

канд. техн. наук

Харківський національний університет будівництва та архітектури, Харків

В статті розглядається варіаційна постановка задач повзучості та пошкоджуваності стержнів за умови їх згину. Метод розв'язання задачі засновано на сполученні покрокового інтегрування рівнянь стану повзучості і розв'язанням на кожному кроці часу варіаційної рівності. Надані числові результати досліджень на базі запропонованого методу розв'язку задачі повзучості та пошкоджуваності стержнів з різними видами закріплення їх країв. Зроблені висновки за отриманими результатами.

Ключові слова: повзучість, пошкоджуваність, змішаний функціонал, варіаційно-структурний метод, стержень.

Вступ. У розрахунках на міцність елементів конструкцій машинобудівної, авіаційної та ракетно-космічної техніки, експлуатаційні умови яких характеризуються високим рівнем температур, необхідно враховувати таке явище, як повзучість. Повзучість елементів конструкцій супроводжується накопиченням незворотних деформацій повзучості та пошкоджуваності, що призводить до руйнування таких елементів конструкцій. Для багатьох відповідальних елементів машинобудівних, авіаційних та ракетно-космічних конструкцій використовують розрахункові схеми у вигляді тонкостінних стержнів, на які зроблено акцент у даній статті. Увага багатьох дослідників прикута до пошуку ефективних підходів вирішення таких проблем тривалої міцності техніки при їх експлуатації під дією високих температур та з врахуванням повзучості [1-10].

Постановка задачі. В роботі розглядається постановка таких задач, а саме ізотропної повзучості й пошкоджуваності тонкостінних стержнів за умови їх згину. Можливості методів, що базуються на розв'язанні диференціальних рівнянь крайових задач теорії пружності, пластичності й повзучості досить обмежені. Відомо, що варіаційні постановки таких задач є зручною основою для побудови й теоретичного обґрунтування багатьох розрахунків складних конструкцій [1-3,7]. У роботі запропоновано ефективний метод розрахунку повзучості стержнів на базі змішаного варіаційного функціонала й варіаційно-структурного методу [3,5,7,9,10]. Такі підходи до розв'язання задач міцності конструктивних елементів машин привертають увагу багатьох дослідників, що пояснює актуальність теми досліджень і проведених результатів у даній статті.

Мета і завдання. Мета роботи та завдання наступні: сформулювати постановку задачі повзучості та пошкоджуваності стержнів при згині під дією розподіленого навантаження по довжині стержнів для різних типів закріплення їх країв; запропонувати варіаційний метод розв'язання даної

задачі; створити програмне забезпечення для розв'язання задачі; виконати числові розрахунки задачі при варіюванні умов закріплення стержнів; проаналізувати отримані результати досліджень – виявити вплив методів інтегрування коефіцієнтів структур рішень на час до руйнування стержнів при повзучості та пошкоджуваності, виявити вплив типів закріплення країв стержнів на час до руйнування при їх повзучості.

Вихідні положення та постановка задачі. Загальна постановка задач ізотропної повзучості та пошкоджуваності тіл детально розглянута в роботах [3,5,9,10]. В даній статті розглянемо постановку задачі повзучості та пошкоджуваності тонкостінного прямолінійного стержня за умови збереження гіпотез Бернуллі-Ейлера [2]. Система координат для даної задачі вводиться наступним чином: вісь z є направленою вздовж осі стержня, осі x та y направлені у поперечному перерізі стержня відповідно рис. 1. Поперечний переріз стержня вважаємо прямокутним.

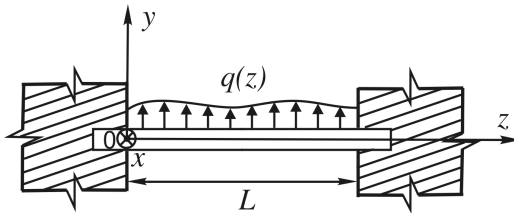


Рис. 1. Схема жорстко закріпленого стержня

Розглянемо плоский згин стержня у площині y, z під дією розподіленого навантаження вздовж його довжини. В даному випадку змішаний варіаційний функціонал [2-5,7,9,10] для задачі

повзучості та пошкоджуваності стержня при плоскому згині буде мати вигляд:

$$R_{u\sigma} = \iint_F \int_z \left[-\gamma \sigma_{zz} \frac{d^2 W}{dz^2} - C_{zz} \sigma_{zz} - \frac{\sigma_{zz}^2}{2E} \right] dF dz - \int_0^L q W dz + Q_y W \Big|_0^L - M_x \frac{dW}{dz} \Big|_0^L. \quad (1)$$

В даному функціоналі позначено вертикальне переміщення стержня (прогин) u_y через W . Ввівши умовне позначення так званого моменту повзучості

$$M_x^c = E \iint_F y C_{zz} dF$$

змішаний функціонал (1) можна записати наступним чином:

$$R_{u\sigma} = \int_0^L \left[M_x \frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{M_x^c M_x}{E J_x} - \frac{M_x^2}{2E J_x} - q W \right] dz + Q_y W \Big|_0^L - M_x \frac{dW}{dz} \Big|_0^L. \quad (2)$$

Умова стаціонарності $\delta R_{u\sigma} = 0$ для функціонала (2) матиме наступний вигляд:

$$\delta R_{u\sigma} = \int_0^L \left[\left(\frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{M_x^c}{E J_x} - \frac{M_x}{E J_x} \right) \delta M_x + \left(\frac{d^2 M_x}{dz^2} - q \right) \delta W dz - \delta M_x \frac{dW}{dz} \Big|_0^L + \delta Q_y \frac{dW}{dz} \Big|_0^L + \left(Q_y - \frac{dM_x}{dz} \right) \delta W \Big|_0^L \right]. \quad (3)$$

З варіаційної рівності функціонала отримуємо рівняння Ейлера, які запишуться наступним чином:

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \frac{M_x^c - M_x}{EJ_x} = 0, \quad \frac{d^2M_x}{dz^2} - q = 0, \quad (4)$$

та граничні умови

$$W|_{z=0} = W|_{z=L} = 0; \quad \left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=0} = \left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=L} = 0; \quad \left(Q_y - \frac{dM_x}{dz} \right) \Big|_{z=0,L} = 0. \quad (5)$$

Отримані рівняння Ейлера (4) для визначення невідомих деформацій повзучості на кожному кроці часу доповнюються рівняннями стану повзучості [1,3-6,8-10]. У подальшому при розв'язанні одновимірних задач теорії повзучості стержнів за умови їх плоского згину рівняння стану повзучості приймаються у такому вигляді:

$$\frac{dC_{zz}}{dt} = \frac{B|\sigma_{zz}|^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} \sigma_{zz}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{D|\sigma_{zz}|^k}{(1-\omega^r)^s} \quad (6)$$

з наступними початковими умовами:

$$\begin{aligned} C_{zz}(0) &= \omega(0) = 0, \\ \omega(t_s) &= 0,9, \end{aligned} \quad (7)$$

де C_{zz} – осьова складова деформації повзучості; $\omega(t)$ – параметр пошкоджуваності; σ_{zz} – нормальні напруження, що діють у поперечному перерізі стержня; B, D, n, m, r, k, s – константи, які визначаються при обробці експериментальних даних.

Метод розв'язку задачі. Для розв'язання початково-крайової задачі повзучості тіл запропонований чисельно-аналітичний метод, що являє собою сполучення варіаційно-структурного методу теорії R-функцій для відшукування точок стаціонарності змішаного варіаційного функціонала на кроці часу й чисельного методу Рунге-Кутта-Мерсона для продовження рішень у часі [8].

Структури рішень при розгляді повзучості стержнів для невідомих функцій W, M_x – прогинів і згинальних моментів, визначених у точках координатної осі жорстко закріпленого стержня (рис. 1), прийняті у наступному вигляді:

$$W = \omega \sum_{i=1}^N B_i P_i^w, \quad M_x = \sum_{i=1}^N A_i P_i^m, \quad \omega = \left(\frac{z^2}{L^2} - \frac{z}{L} \right)^2, \quad (8)$$

де P_i – поліноми i -ої степені, A_i, B_i – коефіцієнти апроксимації, ω – функція за допомогою якої задовольняються граничні умови.

Рішення варіаційної рівності для змішаного функціонала (2) на кроці часу здійснювалося варіаційно-структурним методом. Для визначення невідомих параметрів, що входять у структури рішень (8), у даній роботі застосовано варіаційно-структурний метод. Ідея методу полягає в тому, що структури рішень у вигляді (8) підставляються у варіаційне рівняння (3), у якому варіації беруться по невизначених параметрах, що входять у структури рішень. Дорівнюючи нулю коефіцієнти при варіаціях, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно невизначених параметрів, що входять у структури рішень. Таким чином, варіаційно-структурний метод зводить варіаційну задачу до задачі

розв'язання СЛАР. Запишемо далі СЛАР для структури рішень задачі (8) для варіаційного рівняння, з урахуванням того, що структури задовольняють всім крайовим умовам, при цьому позначивши

$$\omega P_i^W = \psi_i, P_i^M = \varphi_i,$$

отримаємо для стержня систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів структур у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p B_j \int_0^L \psi_j'' \varphi_k dz - \sum_{i=1}^n A_i \frac{1}{EJ_x} \int_0^L \varphi_i \varphi_k dz + \frac{1}{EJ_x} \int_0^L M_x^c(z) \varphi_k dz = 0, & k = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n A_i \int_0^L \psi_m \varphi_i'' dz - \int_0^L q_z(z) \psi_m dz = 0, & m = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (9)$$

В даних рівняннях, на відміну від задачі пружного деформування стержня за плоского згину, враховані додаткові складові, що відповідають повзучості. Систему рівнянь (9) можна записати з урахуванням $m = k = n$ в матричному вигляді наступним чином:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_M \\ q_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_z^c \\ q_z \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де $q_M [i] = A_i$, $q_u [i] = B_i$,

$$\begin{aligned} K_{11} [i, j] &= -\frac{1}{EJ_x} \int_0^L \varphi_i \varphi_j dz; & K_{12} [i, j] &= \int_0^L \psi_j'' \varphi_i dz; \\ K_{21} [i, j] &= \int_0^L \psi_i \varphi_j'' dz; & K_{22} [i, j] &= 0; \\ q_z [i] &= \int_0^L q_z \psi_i dz, & q_z^c [i] &= -\frac{1}{EJ_x} \int_0^L M_x^c \varphi_i dz. \end{aligned} \quad (11)$$

В даному випадку отримаємо матричні рівняння:

$$\begin{aligned} [K_{11}] \{q_M\} + [K_{12}] \{q_u\} &= \{q_z^c\}; \\ [K_{21}] \{q_M\} &= \{q_z\}; \end{aligned} \quad (12)$$

Потрібно відмітити, що для обчислення виразу $q_z^c [i] = -\frac{1}{EJ_x} \int_0^L M_x^c \varphi_i dz$ на

кожному кроці за часом необхідно мати значення компонент незворотних деформацій повзучості. Для чого рівняння стану повзучості (6) необхідно інтегрувати, наприклад, за допомогою методу Рунге-Кутта.

Задача, таким чином, зводиться до пошуку невизначених компонентів структур рішень з умови стаціонарності змішаного варіаційного функціонала. Для знаходження невідомих компонентів структур рішень (8) з системи алгебраїчних рівнянь (12) в роботі використовувався метод Гауса. Для визначення коефіцієнтів матриць (11) системи рівнянь (12) використовувався числовий метод Гауса при інтегруванні по довжині і товщині стержня.

Таким чином метод розв'язання задачі повзучості й пошкоджуваності стержня полягає в наступному: використовуючи значення напружень, що визначаються через згинальний момент із системи рівнянь (5) у початковий момент часу, виконується інтегрування рівнянь стану повзучості виду (6) з

використанням методу Рунге-Кутта в модифікації Мерсона й триває рішення за часом на основі змішаного варіаційного функціонала (4). Дана методика у загальному випадку для задач повзучості тіл викладена докладно в роботах [3, 5, 9, 10].

Результати дослідження. По запропонованому алгоритму розв'язання задачі повзучості в статті виконані числові дослідження.

Для конкретизації матеріальних постійних, які входять у рівняння стану ізотропних матеріалів при повзучості використовуються дослідні дані про одноосову повзучість зразків [1,3-6,8].

Спочатку в роботі розглянуто стержень прямокутного поперечного перерізу з жорстко закріпленими краями (рис. 1), який виготовлений з матеріалу Д16АТ. Стержень при температурі 300°C деформується в умовах повзучості під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження $q=2.5 \text{ кН/м}$. Параметри стержня в розрахунках прийняті наступними: довжина $L=2 \text{ м}$, ширина $b=0.01 \text{ м}$, висота $h=0.1 \text{ м}$. Для вивчення збіжності числових рішень в початковий момент часу результати розрахунків порівнювались з аналітичним розв'язком задачі (пружного деформування стержня), як і в роботах [2, 3]. Зіставлення отриманих результатів свідчить про їх співпадіння.

Фізико-механічні постійні ізотропного сплаву Д16АТ у рівняннях стану повзучості, як й у роботі [3, 9, 10], при температурі $T=300^{\circ}\text{C}$, прийнято рівними:

$$E = 65 \text{ ГПа}, B = 0.34 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^n/\text{ч},$$

$$D = 1.9 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^m/\text{ч}, n = m = k = l = 2.93, \alpha = 0, \nu = 0.3.$$

Дані результати вперше наведені в роботі [3], в даній роботі інтегрування коефіцієнтів матриць систем Рітца виконувалось з використанням числового методу Сімпсона при інтегуванні по довжині і товщині стержня. Але в даному випадку для інтегрування коефіцієнтів матриць систем Рітца (12) використовувався метод Гауса. На рис. 2 представлені епюри нормальних напружень у перерізі стержня в місці жорсткого закріплення та надані зміни прогинів стержня для різних моментів часу: 1 – у початковий, 2 – у момент часу 29 годин й 3 – у момент близький до завершення прихованого руйнування (51 година). Розрахунки проводилися з утриманням 4 базисних функцій в апроксимаціях прогину і згинального моменту вздовж довжини стержня. Сітка для знаходження компонентів незворотної деформації повзучості і параметра пошкоджуваності обиралася наступною: 48 точка вздовж довжини стержня й 32 точки вздовж висоти

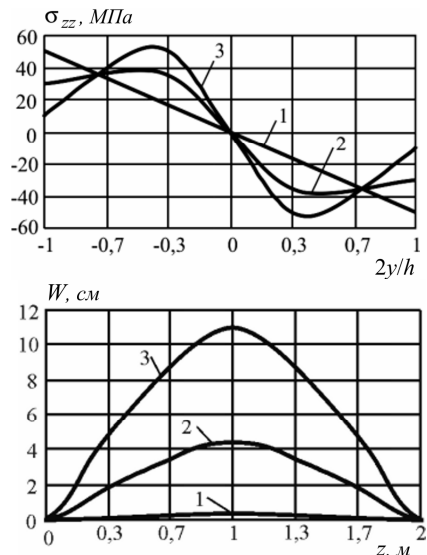


Рис. 2. Зміна у часі нормальних напружень і прогину стержня

перерізу стержня. Слід зазначити досить суттєвий перерозподіл напружень та зростання прогину у часі. Встановлено, що за використання методу Сімпсона для інтегрування коефіцієнтів матриць систем Рітца, час до руйнування такого стержня зменшувався майже на 10% у порівнянні з використанням високоточного методу Гауса при інтегруванні коефіцієнтів системи (12) по довжині та товщині.

Далі розглянута повзучість та пошкоджуваність стержня на шарнірних нерухомих опорах (рис. 3). Геометричні розміри стержня, значення навантаження, фізико-механічні властивості матеріалу прийняті такими ж, як і в попередньому прикладі стержня з жорстким закріпленням.

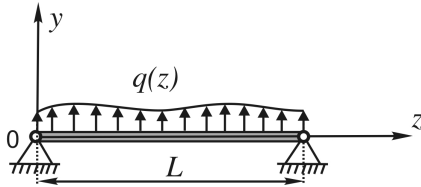


Рис. 3. Схема шарнірно закріпленого стержня

На рис. 4 представлені епюри нормальних напружень у середньому перерізі стержня та надані зміни прогинів стержня для різних моментів часу: 1 – у початковий, 2 – у момент часу 8.7 години й 3 – у момент близький до завершення прихованого руйнування - 15 годин.

Можна зробити висновок про суттєве зростання прогину стержня в часі, зменшення часу до руйнування стержня в даному прикладі майже в 3.5 рази в порівнянні з попереднім прикладом (жорсткого закріплення стержня по краям).

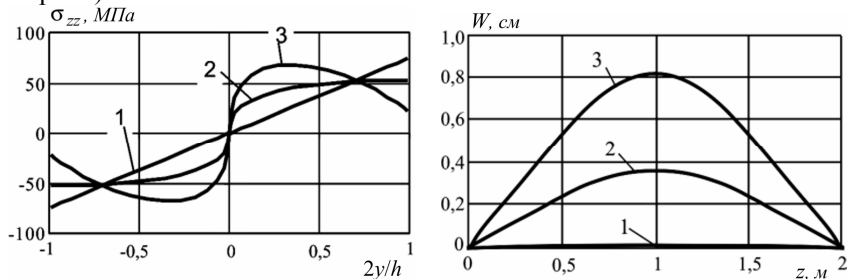


Рис. 4. Зміна у часі нормальних напружень і прогину стержня

Далі розглянута повзучість та пошкоджуваність жорстко закріпленого стержня з лівого краю (рис. 5). Геометричні розміри стержня, значення навантаження, фізико-механічні властивості матеріалу зберігаються такими ж самими, як і в попередніх прикладах.

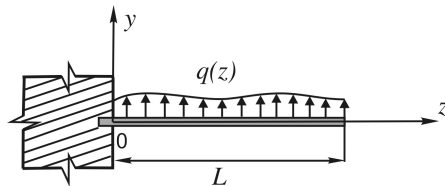


Рис. 5. Схема жорстко закріпленого стержня

На рис. 6 представлені епюри нормальних напружень у перерізі жорсткого закріплення стержня та надані зміни

прогинів стержня для різних моментів часу: 1 – у початковий, 2 – у момент часу 0.15 годин й 3 – у момент близький до завершення прихованого руйнування – 0.26 годин.

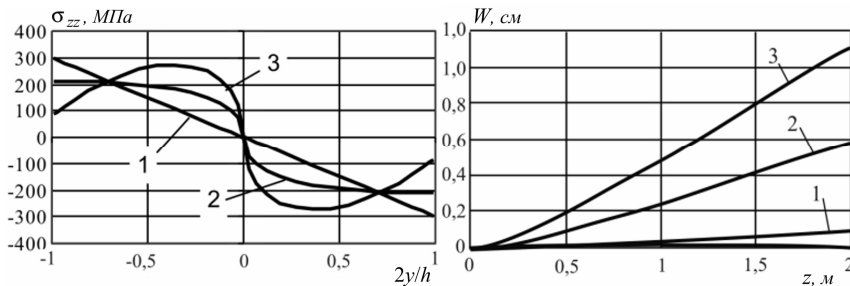


Рис. 6. Зміна у часі нормальних напружень і прогину стержня

Можна зробити висновок про суттєве зростання прогину стержня в часі, зменшення часу до руйнування стержня в даному прикладі майже в 57 разів в порівнянні з попереднім прикладом (стержень з шарнірно нерухомими опорами).

Висновки. У статті розглянуті повзучість і пошкоджуваність стержнів на базі змішаного варіаційного функціонала. Проведені числові дослідження збіжності рішень при варіюванні кількістю утримуваних компонентів структур і числом точок дискретизації області інтегрування стержня. Розрахунками встановлено, що зі збільшенням числа базисних функцій і кількості точок області дискретизації результати розрахунків практично не змінюються. За результатами проведених розрахунків можна зробити висновок про істотний вплив росту деформацій повзучості на перерозподіл напружень і зростання прогинів стержнів із часом для усіх видів закріплення. Найбільш небезпечним виявляється жорстке закріплення з лівого краю стержня, час до руйнування для такого типу закріплення суттєво зменшується у порівнянні з іншими типами наведеними в даній статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin - walled shells and plates under creep - damage conditions. Arch. Appl. Mech., 67, (1997), p. 339 - 352.
2. *Демидов В.И.* Теория упругости. М.: Высшая школа, 1978 г., 387 с.
3. *Морачковский О.К., Соболев В.Н.* Решения задач ползучести тонкостенных стержней и оболочек на базе смешанного вариационного принципа // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2002. – № 10, Т.2 – С. 82-86.
4. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. - М.: Машиностроение, 1981. - 221с.
5. *Морачковский О.К., Соболев В.Н.* Метод решения задач ползучести тел на основе смешанного вариационного принципа // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2003. – № 12, Т.1 – С. 84-89.
6. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. Tech. Mech., 20, (2000), 215-226.
7. *Reissner E.* On a certain mixed variational theorem and on laminated elastic shell theory. Reprinted from Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells, Springer Verlag, 1987, pp. 17 – 27.
8. *Romashov Yu.V., Sobol V.N.* Mathematical formulations and numerical solutions of initial-boundary-value problem of creep theory // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences / N.N. Kizilova, G.N. Zholtkevych (eds.). – Kharkov: Publishing house PPB Virovec' A.P. Publishing house is a group "Apostrophe", 2011. – 396 p. – P. 120-129.

9. *Соболь В.Н.* Численные решения задач ползучести стержней на базе смешанного вариационного функционала // Сборник научных трудов Sworld. – Выпуск 4(41). Том 3. – Иваново: Научный мир, 2015. – С. 4-7.
10. *Савін О.Б., Соболь В.Н.* Повзучість та пошкоджувальність стержнів і циліндрів на базі змішаного варіаційного функціонала // Науковий вісник будівництва. – Харків: ХНУБА – 2016. – № 4 (86). – С. 130-134.

REFERENCES

1. *Atenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin - walled shells and plates under creep - damage conditions. Arch. Appl. Mech., 67, (1997), p. 339 - 352.
2. *Demidov V.I.* Teoriya uprugosti (Elasticity theory). M.: Vysshaya shkola. 1978 g., 387 p.-rus.
3. *Morachkovskiy O.K., Sobol V.N.* Resheniya zadach polzuchesti tonkostennykh stержney i obolochek na baze smeshannogo variatsionnogo printsipa (Creep problems solutions of thin-walled beams and shells on the base of a mixed variational principle) // Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «Kharkivskyyu politekhnichnyy instytut». – Kharkiv: NTU «KhPI», 2002. – № 10, V.2 – p. 82-86.-rus.
4. *Malinin N.N.* Raschety na polzuchest elementov mashinostroitelnykh konstrukttsiy (Creep solutions of machine building elements). - M.: Mashinostroyeniye. 1981. – 221p.-rus.
5. *Morachkovskiy O.K., Sobol V.N.* Metod resheniya zadach polzuchesti tel na osnove smeshannogo variatsionnogo printsipa (Solution method of creep problems on the base of a mixed variational principle) // Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «Kharkivskyyu politekhnichnyy instytut». – Kharkiv: NTU «KhPI», 2003. – № 12, V.1 – P. 84-89.-rus.
6. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. Tech. Mech., 20, (2000), 215-226.
7. *Reissner E.* On a certain mixed variational theorem and on laminated elastic shell theory. Reprinted from Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells, Springer Verlag, 1987, pp. 17 – 27.
8. *Romashov Yu.V., Sobol V.N.* Mathematical formulations and numerical solutions of initial-boundary-value problem of creep theory // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences / N.N. Kizilova, G.N. Zholtkevych (eds.). – Kharkov: Publishing house PPB Virovec' A.P. Publishing house is a group "Apostrophe", 2011. – 396 p. – P. 120-129.
9. *Sobol V.N.* Chislennyye resheniya zadach polzuchesti stержney na baze smeshannogo variatsionnogo funktsionala (Numerical solutions of creep problems for beams by using mixed variational functional) // Sbornik nauchnykh trudov Sworld. – Vypusk 4(41). Tom 3. – Ivanovo: Nauchnyy mir. 2015. – P. 4-7.-rus.
10. *Savin O.B., Sobol' V.N.* Povzuchist' ta poshkodzhuvanist' stержniv i tsylindriv na bazi zmishanoho variatsiynoho funktsionala (Creep and damage of beams and tubes by using mixed variational functional) // Naukovyy visnyk budivnytstva. – Kharkiv: KhNUBA – 2016. – №4 (86). – P. 130-134.-ukr.

Стаття надійшла 02.05.2018

Savin O.B., Sobol' V.N.

MIXED VARIATIONAL FUNCTIONAL FOR CREEP-DAMAGE PROBLEMS OF BENDING BEAMS

It is necessary to take into account the creep phenomena in long-term strength analysis of structural elements with exploitation at elevated temperatures. This process leads to evaluation of creep irreversible strains and damage parameter and finally to predict the fracture. The most of structural members in aviation and space-rocket techniques have such exploitation conditions. For isotropic materials in the creep process can be used the Rabotnov-Kachanov theory with a scalar damage or continuity parameters. Defects in material accumulate at elevated temperature due to the creep process. This fact is proved by experimental data in metallurgical science.

In the paper the mathematical statement of creep-damage problems for thin-walled beams in bending is presented. The mathematical statement include the mixed variation principle, which is formulated on independently varied functions of displacements and stresses for known creep strains at arbitrary moment of time, and the two numerical methods. The complete system of initial-boundary-value problem of creep for thin-walled beams can be solved by using numerical methods. The first one is based on the variational statement by using variational-structural method of the R – functions theory (RFM - Rvachov's Functions method). The second one is based on the Runge-Kutta-Merson method. The Runge-Kutta-Merson numerical method is used for solving of creep state equations for isotropic material.

Practically important numerical estimations of strength and durability of constructive machine elements, such as beams, are given. Firstly, the test examples are presented. At initial time the numerical results were compared with known analytical results. Numerical data demonstrate the full convergence and coincidence of approximate solutions.

Also numerical results of creep-damage problems for bending beams with different types of edges fixations are given. First numerical results are presented for fixed support beams under constant loading along the beam length. The second one – for hinged supported beam and the last one – for beam with left fixed support.

It can be concluded that there are significant stresses redistribution and growth of displacements in time for all types of edges fixation of mentioned above beams.

Key words: creep, damage, mixed functional, variational-structural method, beam.

Савин А.Б., Соболев В.Н.

СМЕШАННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ФУНКЦИОНАЛ В ЗАДАЧАХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИЗГИБЕ

В статье рассматривается вариационная постановка задачи ползучести и повреждаемости стержней при их изгибе. Метод решения задачи основан на сочетании пошагового интегрирования уравнений состояния ползучести и решением на каждом шаге вариационного равенства. Представлены численные результаты исследований на базе предложенного метода решения задач ползучести и повреждаемости стержней с разными видами закрепления их краев. Сделаны выводы по полученным результатам расчетов.

Ключевые слова: ползучесть, повреждаемость, смешанный функционал, вариационно-структурный метод, стержень.

УДК 539.3

Савин О.Б., Соболев В.М. **Змішаний варіаційний функціонал в задачах повзучості та пошкоджуваності стержнів при згині** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 115-123.

Розглядається метод розв'язання задач повзучості та пошкоджуваності стержнів при згині з використанням змішаного варіаційного функціонала.

Табл. 0. Іл. 6. Бібліогр. 10 назв.

Savin O.B., Sobol' V.N. **Mixed variational functional for creep-damage problems of bending beams** / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2017. – Issue 100. – P. 115-123. – Ukr.

The solution method of creep-damage problems of bending beams by using of the mixed variational functional is considered.

Табл. 0. Fig. 6. Bibliograph. 10 ref.

Савин А.Б., Соболев В.Н. **Смешанный вариационный функционал в задачах ползучести и повреждаемости стержней при изгибе** / Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. – К.: КНУСА, 2018. – Вип. 100. – С. 115-123.

Рассматривается метод решения задач ползучести и повреждаемости с использованием смешанного вариационного функционала.

Табл. 0. Ил. 6. Библиогр. 10 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури

Адреса робоча: 61002 Україна, м. Харків, вул. Сумська 40, Харківський національний університет будівництва та архітектури, САВІНУ Олександру Борисовичу.

Мобільний тел.: +38(097) 800-53-30;

E-mail: asavin344@gmail.com

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури

Адреса робоча: 61002 Україна, м. Харків, вул. Сумська 40, Харківський національний університет будівництва та архітектури, СОБОЛЮ Володимиру Миколайовичу.

Мобільний тел.: +38(068) 885-94-26;

E-mail: sobol_vn@ukr.net

UDK 624.012.3

DESIGN SOLUTIONS OF OPTIMAL SYSTEMS UNDER ACTION OF DEAD AND LIVE MOBILE LOAD

Yu.P. Kitov,

PhD in Technical Sciences, Associate professor

M.A. Verevicheva,

PhD in Technical Sciences, Associate professor

G.L. Vatulia,

Dr. Sci. Eng., Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department

S.V. Deryzemlia,

Postgraduate student of Structural Mechanics and Hydraulics Department

Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv

Abstract. The authors have considered the design of a three-span beam bridge of a given length under live load. The purpose of this study is obtaining an equally strong system, in which the maximum stresses in all elements are equal to the estimated ones. A few statically determinate and statically indeterminate systems have been considered to determine the optimal one. It has been proved that optimal solutions exist both in the set of statically determinate and indeterminate systems.

Keywords: reinforced steel concrete beam, live load, dead load, beam bridge, equally strong system, design optimization.

1. General

In his monograph [1], A.I. Vinogradov considered the problem of design optimizing and showed that there is no optimal solution in the set of statically indeterminate systems if the geometrical characteristics of the cross-sections of the elements are taken as optimization arguments. The optimal system can be obtained by neglecting under-stressed constraints and is in the set of statically determinate systems.

In this article, the example of optimization of a three-span continuous beam was used to show that an optimal solution can be an element of both statically determinate and statically indeterminate sets if a displacement of support fastenings is allowed.

As before, the optimal internal stress distribution in the system shall be understood as such a set of internal stresses with which the system becomes optimal, for example, a system of minimum volume or value [3, 8-17]. The system is optimal if the maximum stresses are equal to the estimated ones in all its elements, that is, if the system is equally strong. If the stress-strain state and the cross-sections of all the elements are also the same, then the system of equal strength is a system with equal stresses in the design sections.

In the set of statically determinate systems, the stresses are determined from the static equilibrium equations; their distribution under the given load depends only on the linear dimensions of the elements and on their mutual arrangement and does not depend on the displacement of the support fastenings.

In the set of statically indeterminate systems, the stresses are determined from the equilibrium equations, as well as from the strain compatibility

equations [4-7]. Their distribution depends on the dimensions of the structural elements, as well as on the displacement of the support fastenings. Therefore, not only the linear dimensions of the elements should be changed, but also the support fastenings should be displaced to obtain an optimal system in a set of statically indeterminate systems.

2. Problem statements

In this article, the optimization algorithm of the multi-span statically determinate and indeterminate uniform section beams is generalized as compared to [2] for the case of action of dead and live mobile loads and is also applicable to the beams with displaced supports.

A continuous beam of the constant cross-section on the fixed supports is accepted as the initial system (Fig. 1, a). The beam length l and the number of support fastenings n are considered to be given.

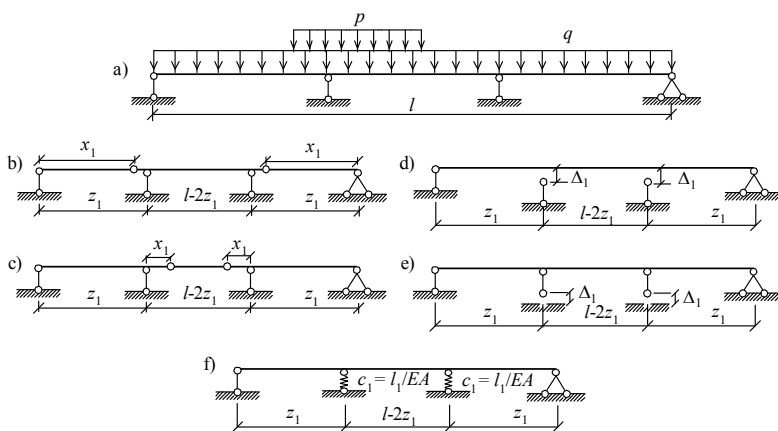


Fig. 1. Design solutions of optimal systems:

- a) given continuous three-span beam; b) multi-span beam with hinge joints on the end spans; c) multi-span beam with hinge joints in the middle span; d) beam with unilateral support fastenings; e) beam with displaced supports; f) beam with resilient connections

If the optimal solution is searched for in the set of statically determinate systems, $n-2$ connections should be dropped by mounting the same number of hinge joints (Fig. 1, b, c). In such case, distances from the hinge joints to the support fastenings x_i and span lengths z_i are accepted as optimization parameters. If the number of hinge joints ($n-2$) is even, then since the system is symmetric, the number of parameters x_i will be two times less, i.e. $(n-2)/2$. If the number of hinge joints is uneven, the number of unknowns is $(n-3)/2 + 1$. The number of optimization parameters z_i is accepted being $(n-2)$ minus the number of parameters x_i .

If the optimal design is searched for in the set of statically indeterminate systems, it is possible with one of three design solutions:
– a beam with unilateral support connections (Fig. 1, d);

– a pre-tensioned system obtained by vertical displacement of the supports (Fig. 1, e);

– a beam with resilient connections (Fig. 1, f).

In all above cases, the optimization parameters which effect the stress distributions are span lengths z_i . Moreover, depending in the choice of the design solution as optimization parameters k_i (coefficient k_i determines the part of distributed load $k_i q$, at which the beam touches the supports, i.e. becomes statically indeterminate); $\Delta_i EJ$ (Δ_i – support displacement) or $c_i EJ$ (c_i – support yield) are chosen, respectively. The number of optimized parameters is determined the same way as with the statically determinate constructions, while the number k_i , $\Delta_i EJ$ or $c_i EJ$ is equal to number x_i .

3. Design optimization of the three-span beam bridge

3.1 Problem statements. An optimal design of a three-span beam bridge of the specified length l under dead load $q = \text{const}$ and live load p (Fig. 1, a) shall be obtained. The beam cross-section is uniform and equal in all spans, the arrangement is symmetrical.

3.2 Optimization conditions. Since the load-bearing elements are beams with the uniform cross-section, they experience the same stress-strain states under the load. Therefore, the optimal bridge design is equal-strength beams - with equal maximum bending moments in the typical cross-sections: in the first span, above the support and in the second span (Fig. 1, a).

There are three typical cross-sections with maximum moments, therefore two optimality conditions should be provided, namely:

$$M_{1\max} = |M_{\text{sup}}|, \quad (1)$$

$$|M_{\text{sup}}| = M_{2\max}. \quad (2)$$

Optimality equations are compiled based on these conditions, there are two of them for this problem. Solving these equations together, we determine the optimal design parameters for different types of beams.

Since the number of the unknowns $c_i EJ$, $\Delta_i EJ$ and k_i in this case is 1, we omit index i : cEJ , ΔEJ , k .

The formulas for defining moments in the typical cross-sections under the combined action of dead and live loads are given below.

4. Optimization of a multi-span statically determinate beam

4.1 Multi-span beam with hinge joints in the end spans (Fig. 1, b)

After making the storey plan of the multi-span beam, we obtain the values of the moments in the typical sections from dead load q [2].

Based on the analysis of the influence line of the bending moment, we conclude on the location of the unfavorable load case with the live load (Fig. 2).

Thus, having accepted that the live load intensity p is equal in all parts, we obtain the expressions as follows for the moments in the typical cross-sections:

$$M_{1\max} = \frac{(q+p)x^2}{8}, \quad (3)$$

$$M_{sup} = \frac{(q + p)z_1(x - z_1)}{2}, \tag{4}$$

$$M_{2max} = -q \frac{z_1(z_1 - x)}{2} + (q + p) \frac{(l - 2z_1)^2}{8}. \tag{5}$$

Form (1), we obtain the expression for x :

$$x = 2z_1(\sqrt{2} - 1). \tag{6}$$

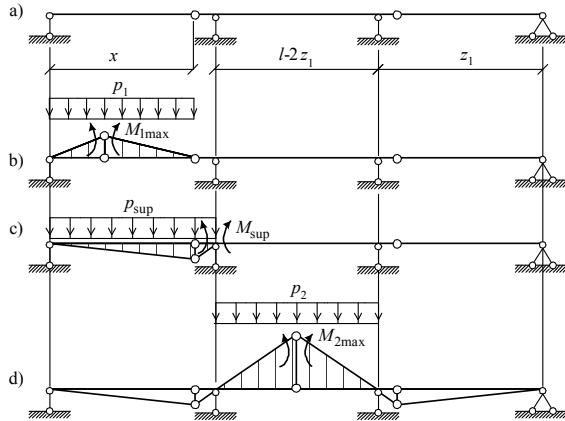


Fig. 2. Multi-span beam with the hinge joints on the end spans (a) and unfavorable load cases for M_1 (b), M_{sup} (c) and M_2 (d), where M_{sup} support moment

Parameter z_1 is numerically defined by iterate over the values with increment of 0.001, until the condition is fulfilled (2).

4.2 Multi-span beam with hinge joints in the middle span (Fig 1, c)

After making the storey plan of the multi-span beam, we obtain the values of the moments in the typical sections from dead load q [2].

Based on the analysis of the influence line of the bending moment, we conclude on the location of the unfavorable load case of the mobile load (Fig. 3).

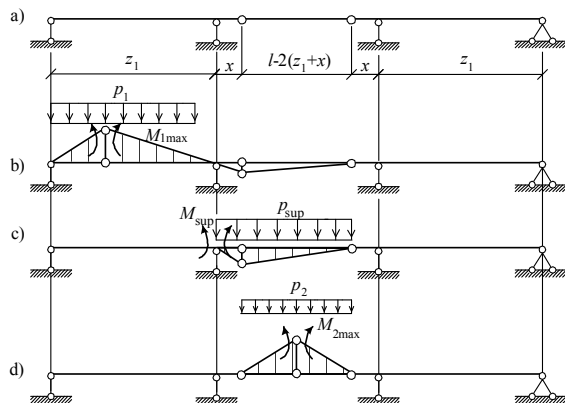


Fig. 3. Multi-span beam with the hinge joints on the end spans (a) and unfavorable load cases for M_1 (b), M_{sup} (c) и M_2 (d), where p_{sup} support load

Thus, having accepted that the live load intensity p is equal in all parts, we obtain:

$$M_{1\max} = R_1 x_{\max} - (p+q) \frac{x_{\max}^2}{2}, \quad (7)$$

$$R_1 = \frac{q}{2z_1} (z_1^2 - x^2 - z_2 x) + \frac{pz_1}{2}, \quad x_{\max} = \frac{R_1}{p+q}, \quad z_2 = l - 2(x + z_1),$$

$$M_{\text{sup}} = -\frac{(q+p)x(z_2-x)}{2}, \quad (8)$$

$$M_{2\max} = (q+p) \frac{z_2^2}{8}. \quad (9)$$

From (2), we obtain the expression for x :

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} (l - 2z_1). \quad (10)$$

Parameter z_1 is numerically defined by iterate over the values with increment of 0.001, until the condition is fulfilled (1).

5. Optimization of the continuous beam

We will show the algorithm for determining stresses using the continuous three-span beam (Fig. 4 (a)). Since the beam will be loaded with dead and live mobile loads, stresses will be determined using the influence lines. We will choose the main system by inserting the hinge joints in the middle sections above the supports (Fig. 4 (b)). We accept moments at support as redundancies. Isolated and load stress diagrams of the bending moments in the main system which are required to determine the coefficients of the system of fundamental equations, are shown in Fig. 4.(c-g).

The unknown values X_1, X_2 under the live load are defined from the system of fundamental equations

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} + \delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

and are

$$X_1 = \frac{\delta_{11} \delta_{1F} - \delta_{12} \delta_{2F}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11}^2}, \quad X_2 = \frac{\delta_{11} \delta_{2F} - \delta_{12} \delta_{1F}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11}^2}. \quad (12)$$

Coefficients of the system of fundamental equations at the unknowns for all spans are equal and determined by the formulas

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} du = \frac{2(l-z_1)}{6EJ}, \quad (13)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} du = \frac{l-2z_1}{6EJ}. \quad (14)$$

In case of a symmetrical beam $\delta_{22} = \delta_{11}$.

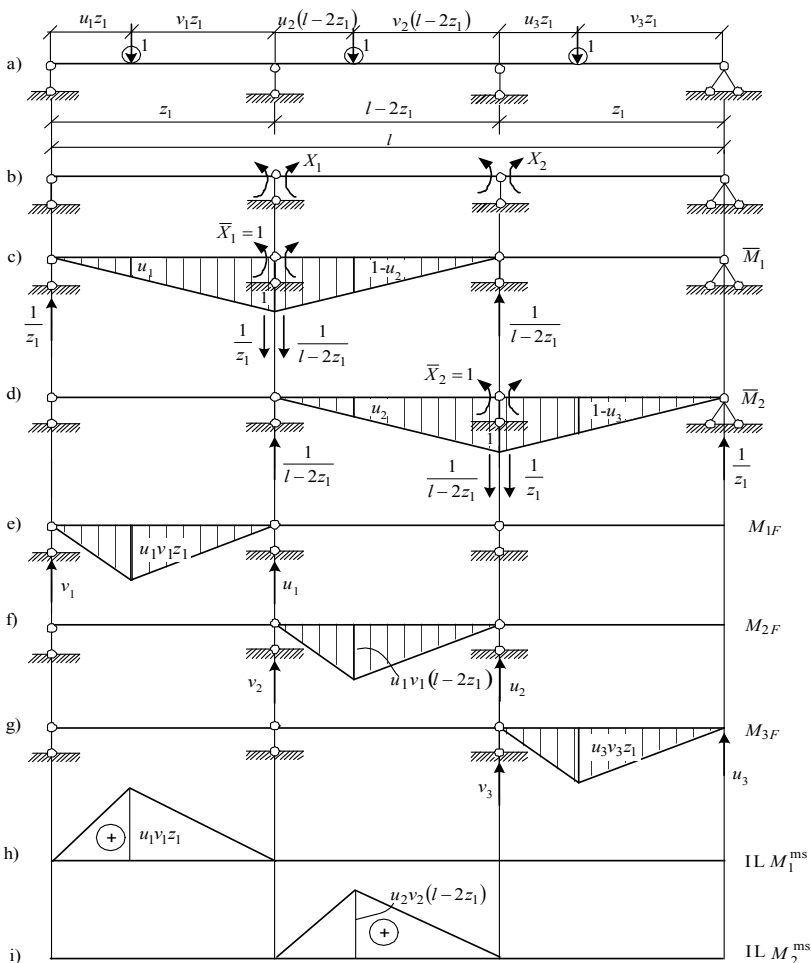


Fig. 4. Continuous beam (a); main system (b); isolated (c, d) and load (e, f, g) stress diagrams in the main systems; influence line M_1^{ms} , M_2^{ms} in cross-sections u_1 , u_2 (h, i)

Free terms of the system are written for each span:

– on the first span

$$\delta_{1F(1)} = \int \frac{M_{1F} \bar{M}_1}{EJ} du = \frac{u_1 z_1^2 (1 - u_1^2)}{6EJ}, \tag{15}$$

$$\delta_{2F(1)} = \int \frac{M_{1F} \bar{M}_2}{EJ} du = 0; \tag{16}$$

– on the second span

$$\delta_{1F(2)} = \int \frac{M_{2F} \bar{M}_1}{EJ} du = \frac{u_1 (1 - u_1) (2 - u_1) (l - 2z_1)^2}{6EJ}, \tag{17}$$

$$\delta_{2F(2)} = \int \frac{M_{2F} \bar{M}_2}{EJ} du = \frac{u_1 (1 - u_1^2) (l - 2z_1)^2}{6EJ}; \tag{18}$$

– on the third span

$$\delta_{1F(3)} = \int \frac{M_{3F} \bar{M}_1}{EJ} du = 0, \quad (19)$$

$$\delta_{2F(3)} = \int \frac{M_{3F} \bar{M}_2}{EJ} du = \frac{u_1(1-u_1)(2-u_1)z_1^2}{6EJ}. \quad (20)$$

When we solve the system of fundamental equations (11) in each cross-section u , in accordance to (12) we plot the influence lines X_1, X_2 . For this purpose, during the numerical solution we divide each span into the given number of equal intervals, and accept points u on the limits of ranges.

Ordinates of the influence lines of the moments in the cross-section u are determined using the formulas

$$IL M_{1,u} = M_1^{ms} + \bar{M}_1(u) IL X_1 + \bar{M}_2(u) IL X_2, \quad (21)$$

$$IL M_{2,u} = M_2^{ms} + \bar{M}_1(u) IL X_1 + \bar{M}_2(u) IL X_2, \quad (22)$$

where M_1^{ms}, M_2^{ms} – influence lines of the bending moment in the main system on the 1st and 2nd spans, accordingly (Fig. 4 (h),(i)).

5.1 Continuous beam with unilateral support connections (Fig. 1, d)

Expressions for the moments in the typical cross-sections loaded with dead load, according to [2], are:

$$M_{1,x} = \left[\frac{xk(l^3 - 2lz_1^2 - z_1^3)}{4z_1(3l - 4z_1)} + \frac{x(-l^3 - 6lz_1^2 + 6l^2z_1 - z_1^3)}{4z_1(3l - 4z_1)} - \frac{x^2}{2} \right] q, \quad 0 \leq x \leq z_1, \quad (23)$$

$$M_{sup} = \frac{-(l - 2z_1)^3 - z_1^3 + (l^3 - 2lz_1^2 + z_1^3)k}{4(3l - 4z_1)} q, \quad (24)$$

$$M_{2max} = \left[\frac{2(l^3 - 2lz_1^2 + z_1^3)k + l^3 - 4l^2z_1 + 4lz_1^2 - 2z_1^3}{8(3l - 4z_1)} \right] q. \quad (25)$$

Based on the analysis of the influence line of the bending moment, we conclude on the location of the unfavorable load case with the live load (Fig. 5).

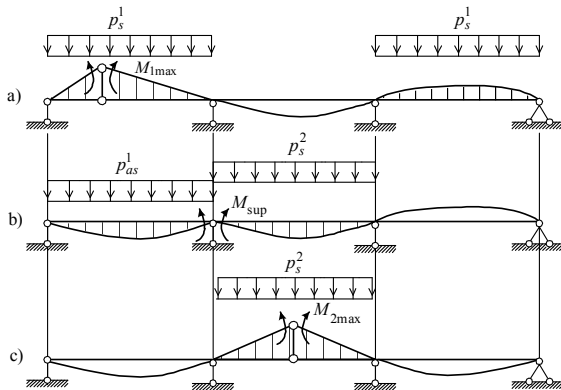


Fig. 5. Unfavorable load case for M_1 (a), M_{sup} (b), M_2 (c),

where p_s - symmetrical load; p_{as} - asymmetrical load

We suppose that the live load p is equal in all parts, thus, p :
 $p_s^1 = p_s^2 = p_{as}^1 = p$.

We obtain the unknown moments X_1, X_2 (Fig. 4 (b)) at the live load from the fundamental equations (11), (12). The coefficients at the unknowns are determined in accordance with (13), (14).

We take as free terms:

$$\text{-- to determine } M_{1\max} \quad \delta_{1F} = \delta_{2F} = \delta_{1F}^{\max} = \delta_{2F}^{\max} = \frac{p z_1^3}{24EJ} .$$

Using the obtained values X_1 and expressions for M_1 from dead load, we obtain [2]

$$M_{1\max} = \frac{\left[(l^3 - 2lz_1^2 + z_1^3)k - l^3 + 6l^2z_1 - 6lz_1^2 - z_1^3 \right] q + 3z_1^2(2l - 3z_1)p}{4z_1(3l - 4z_1)} x_{\max} - (q + p) \frac{x_{\max}^2}{2} , \quad (26)$$

$$x_{\max} = \frac{\left[(l^3 - 2lz_1^2 + z_1^3)k - l^3 + 6l^2z_1 - 6lz_1^2 - z_1^3 \right] q + 3z_1^2(2l - 3z_1)p}{4z_1(3l - 4z_1)(q + p)} ;$$

$$\text{-- to determine } M_{\text{sup}} \quad \delta_{1F} = \delta_{1F}^{\text{sup}} = \frac{p}{24EJ} \left[(l - 2z_1)^3 + z_1^3 \right] ;$$

$$\delta_{2F} = \Delta_{2F}^{\text{sup}} = \frac{p(l - 2z_1)^3}{24EJ} .$$

Using the obtained values X_1 and expressions for M_{sup} from dead load, we obtain [2]

$$M_{\text{sup}} = - \frac{l \left[(l - 2z_1)^3 + z_1^3 - (l^3 - 2lz_1^2 + z_1^3)k \right] q + \left[l(l - 2z_1)^3 - 2z_1^3(z_1 - l) \right] p}{4l(3l - 4z_1)} ; \quad (27)$$

$$\text{-- to determine } M_{2\max} \quad \delta_{1F} = \delta_{2F} = \delta_{1F}^{2\max} = \delta_{2F}^{2\max} = \frac{p(l - 2z_1)^3}{24EJ} .$$

Using the obtained values X_1 and expressions for $M_{2\max}$ from dead load, we obtain [2]

$$M_{2\max} = \frac{\left[2(l^3 - 2lz_1^2 + z_1^3)k + l^3 - 4l^2z_1 + 4lz_1^2 - 2z_1^3 \right] q + l(l^2 - 4lz_1 + 4z_1^2)p}{8(3l - 4z_1)} . \quad (28)$$

Parameters z_1, k are numerically defined by iterate over the values with increment of 0.001 and 0.0001, respectively, until the conditions are fulfilled (1), (2).

5.2 Continuous beam with the displaced supports (Fig. 1, e)

First, let us calculate support displacement of the beam under only dead load (Fig. 6 (a)), for instance, using the area-moment method. Fig. 6 (c), (d) shows isolated and load stress diagrams in the main system (Fig. 6 (b)), which are required for calculation.

Thus,

$$X_1 = \frac{-l^3 - 2lz_1^2 + z_1^3}{4z_1(3l - 4z_1)} q - 6 \frac{\Delta EJ}{z_1^2(3l - 4z_1)},$$

$$M_{\text{sup}}(q) = \frac{-l^3 + 6l^2z_1 - 12lz_1^2 + 7z_1^3}{4(3l - 4z_1)} q + 6 \frac{\Delta EJ}{z_1(3l - 4z_1)}, \quad (29)$$

$$M_{1,u}(q) = \frac{quz_1(l - uz_1)}{2} - X_1u, \quad (30)$$

$$M_{2\text{max}}(q) = \frac{l^3 - 4l^2z_1 + 4lz_1^2 - 2z_1^3}{8(3l - 4z_1)} q + 6 \frac{\Delta EJ}{z_1(3l - 4z_1)}. \quad (31)$$

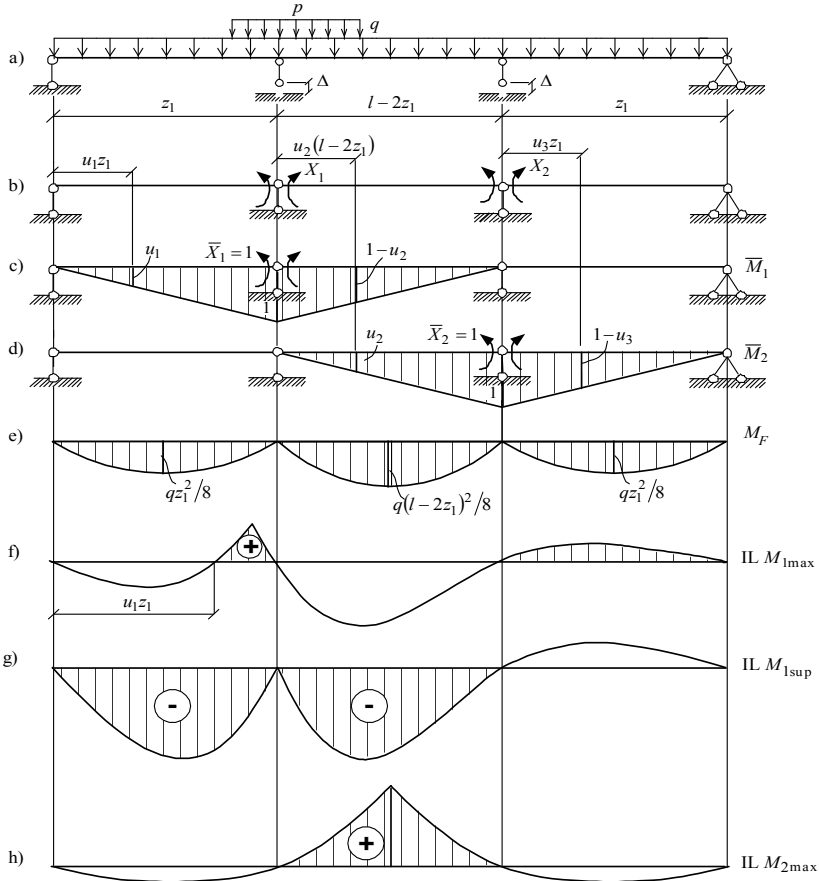


Fig. 6. Beam with the displaced supports (a); main system (b); isolated beam (c, d) and stress diagrams (e) in the main system; influence lines of the moments in the typical points (f–h)

Let us plot in accordance with (21), (22) using Fig. 4 (e) – and influence lines X_1, X_2 without taking into account the support displacement. After we load them according to Fig. 7 (f–h), we can find the moments in the typical points

from the live load without taking into account the support displacement (we accept that the live load intensity p is equal in all parts):

$$M_{1,u}(p) = \int_{u_1 z_1}^{z_1} p(IL M_{1,u}) du + \int_{l-z_1}^l p(IL M_{1,u}) du, \tag{32}$$

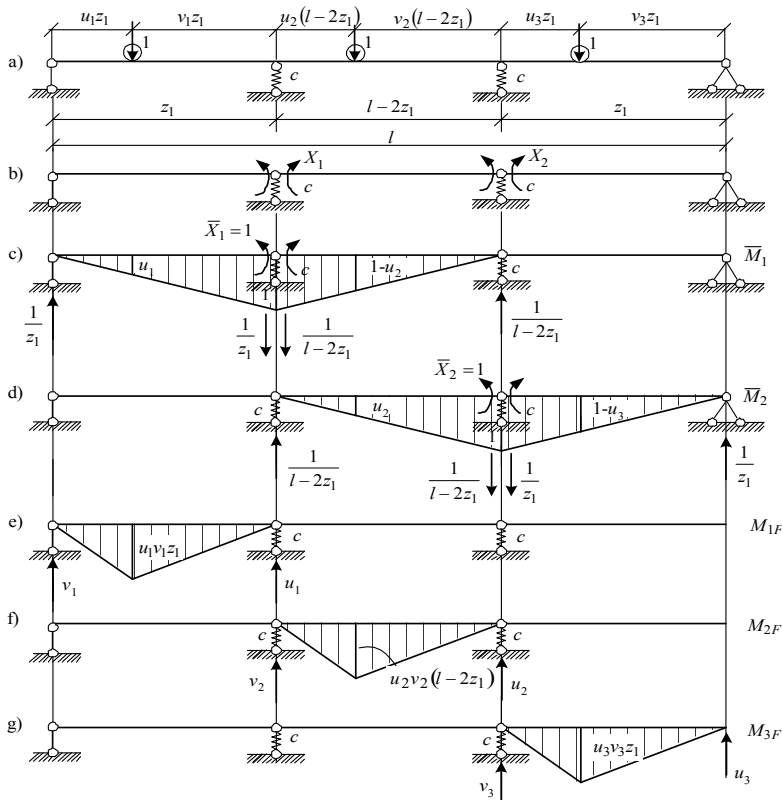


Fig. 7. Beam on the resilient supports (a); main system (b); isolated (c, d) and load (e, f, g) stress diagrams in the main system

$$M_{sup}(p) = \int_0^{l-z_1} p(IL X_1) du, \tag{33}$$

$$M_{2max}(p) = 2 \int_{z_1}^{l-z_1} p(IL M_{2,u}) du. \tag{34}$$

If we add the values of the moments which occur only from the support displacement, we obtain

$$M_{1,u}(p) = \int_{u_1 z_1}^{z_1} p(IL M_{1,u}) du + \int_{l-z_1}^l p(IL M_{1,u}) du + \frac{6\Delta EJ u}{z_1(3l-4z_1)}, \tag{35}$$

$$M_{\text{sup}}(p) = \int_0^{l-z_1} p(\text{IL } X_1) du + \frac{6\Delta EJ}{z_1(3l-4z_1)}, \quad (36)$$

$$M_{2\text{max}}(p) = 2 \int_{z_1}^{l-z_1} p(\text{IL } M_{2,u}) du + \frac{6\Delta EJ}{z_1(3l-4z_1)}. \quad (37)$$

Using the formulas (29) – (31), (35) – (37), we can find the maximum values of moments M_{sup} , $M_{2\text{max}}$ under the combined action of dead and live loads:

$$M_{2\text{max}} = M_{2\text{max}}(q) + M_{2\text{max}}(p), \quad (38)$$

$$M_{\text{sup}} = M_{\text{sup}}(q) + M_{\text{sup}}(p), \quad (39)$$

$$M_{1\text{max}} = \max_{0 < u < z_1} \left(\frac{quz_1(l-uz_1)}{2} - X_1uz_1 + M_{1,u}(p) + \frac{6\Delta EJ u}{z_1(3l-4z_1)} \right). \quad (40)$$

Parameters z_1 , ΔEJ are numerically defined by iterate over the values with increment of 0.001 and 0.0001, respectively, until the conditions are fulfilled (1), (2).

5.3 Continuous beam on the resilient supports (Fig. 1, f)

Analytical determination of the values of the maximum moments under the combined action of dead and live loads is difficult, so the loads are considered separately.

Under the action of dead load according to [2]

$$M_{1x}(q) = \frac{xX_1}{z_1} + \frac{qx(z_1-x)}{2}, \quad 0 \leq x \leq z_1, \quad (41)$$

where

$$X_1 = -\frac{(l-2z_1)^3 + z_1^3 - 12cEJ(l-z_1)/z_1}{3l-4z_1 + 6cEJ/z_1^2/(l-2z_1)^2} \frac{q}{4},$$

$$M_{\text{sup}}(q) = X_1, \quad (42)$$

$$M_{2\text{max}}(q) = X_1 + \frac{q(l-2z_1)^2}{8}. \quad (43)$$

Under action of the live load, the values of moments in the typical points are numerically determined; for this purpose the respective influence lines are plotted and loaded (Fig. 7). We accept that the live load intensity p is equal in all parts.

The unknown values X_1, X_2 under the live load are determined from the system of fundamental equations (11) using the formulas (12), where coefficients at the unknowns for all spans are equal and are determined in accordance with (13), (14) taking into account the support yield (Fig. 7):

$$\delta_{11}^c = \delta_{22}^c = \delta_{11} + \sum R_i c_i = \frac{1}{6EJ} \left[2(l-z_1) + 6cEJ \frac{(l-z_1)^2 + z_1^2}{z_1^2(l-2z_1)^2} \right], \quad (44)$$

$$\delta_{12}^c = \delta_{21}^c = \delta_{12} + \sum R_i c_i = \frac{1}{6EJ} \left[(l-2z_1) - 6cEJ \frac{2(l-z_1)}{z_1(l-2z_1)^2} \right]. \quad (45)$$

Free terms of the system are written for each span. Taking into account the support yield according to (15) – (20), we obtain (Fig. 7):

– on the first span

$$\delta_{1c(1)} = \delta_{1F(1)} + \sum R_i c_i = \frac{u_1}{6EJ} \left[z_1^2(1-u_1^2) + 6cEJ \frac{z_1-l}{z_1(l-2z_1)} \right], \quad (46)$$

$$\delta_{2c(1)} = \delta_{2F(1)} + \sum R_i c_i = \frac{1}{EJ} \frac{cEJu_1}{l-2z_1}; \quad (47)$$

– on the second span

$$\delta_{1c(2)} = \delta_{1F(2)} + \sum R_i c_i = \frac{1}{6EJ} \left[u_2(1-u_2)(2-u_2)(l-2z_1)^2 + 6cEJ \frac{z_1+l(u_2-1)}{z_1(l-2z_1)} \right], \quad (48)$$

$$\delta_{2c(2)} = \delta_{2F(2)} + \sum R_i c_i = \frac{1}{6EJ} \left[u_2(1-u_2^2)(l-2z_1)^2 + 6cEJ \frac{z_1-u_2l}{z_1(l-2z_1)} \right]; \quad (49)$$

– on the third span

$$\delta_{1c(3)} = \delta_{1F(3)} + \sum R_i c_i = \frac{1}{EJ} \frac{cEJ(1-u_3)}{l-2z_1}, \quad (50)$$

$$\delta_{2c(3)} = \delta_{2F(3)} + \sum R_i c_i = \frac{1-u_3}{6EJ} \left[u_3(2-u_3)z_1^2 - 6cEJ \frac{l-z_1}{z_1(l-2z_1)} \right]. \quad (51)$$

When we solve the system of the fundamental equations in each cross-section u , we plot according to (12) taking into account the support yield of the influence lines X_1, X_2 (Fig. 8 (b),(c)):

$$X_1 = \frac{\delta_{11}^c \delta_{1c} - \delta_{12}^c \delta_{2c}}{(\delta_{12}^c)^2 - (\delta_{11}^c)^2}, \quad X_2 = \frac{\delta_{11}^c \delta_{2c} - \delta_{12}^c \delta_{1c}}{(\delta_{12}^c)^2 - (\delta_{11}^c)^2}. \quad (52)$$

Ordinates of the influence lines of the moments in the cross-section u of the beam on the resilient supports are defined in accordance with (21), (22) and Fig. 8 (d), (e).

The values of the moment $M_{2_{\max}}$ and the support bending moment from the live load are determined by the unfavorable load cases of the influence lines X_1 (on the negative parts of the influence line X_1) and $M_{2,u}$ (on the positive parts of the influence line $M_{2,u}$), while the value $M_{2_{\max}}$ is reached in the middle of the beam due to the symmetry (Fig. 8 (b), (e)):

$$M_{\text{sup}}(p) = \int_0^{u_1^x z_1} p(\text{IL } X_1) du + \int_{z_1+u_2^x z_2}^l p(\text{IL } X_1) du, \quad (53)$$

$$M_{2_{\max}}(p) = 2 \int_{u_1^x z_1}^{l/2} p(\text{IL } M_{2,u}) du. \quad (54)$$

The points of intersection of the influence lines with the axis $u_1^x z_1, u_2^x z_2, u_1^2 z_1$ and further $u_1^1 z_2$ (Fig. 8) are numerically defined.

Using the formulas (42), (43), (53), (54), we can find the maximum values of moments $M_{\text{sup}}, M_{2_{\max}}$ under the combined action of dead and live loads:

$$M_{2_{\max}} = M_{2_{\max}}(q) + M_{2_{\max}}(p), \quad (56)$$

$$M_{sup} = M_{sup}(q) + M_{sup}(p) . \tag{56}$$

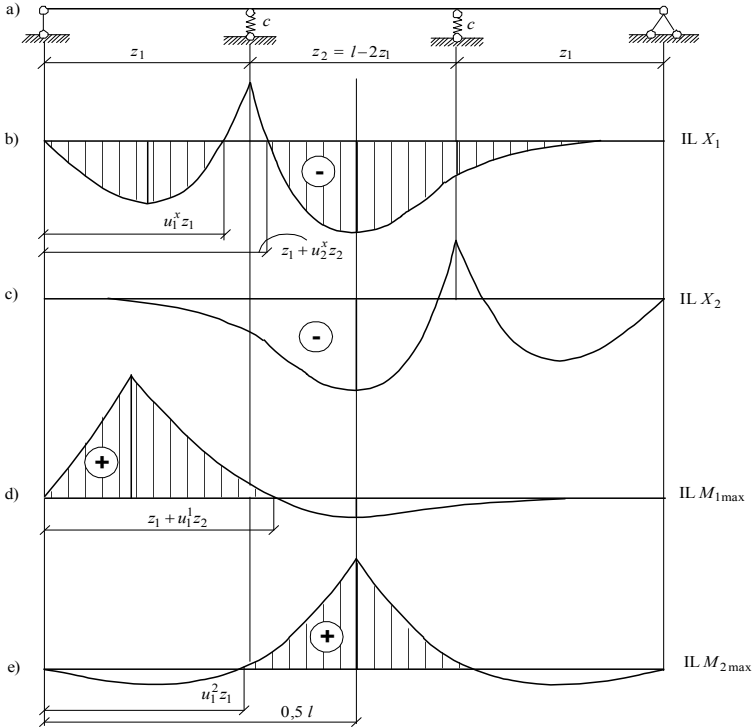


Fig. 8. Diagram of the beam (a); influence lines X_1, X_2 (b, c) and M_{1max}, M_{2max} (d, e)

M_{1max} is the maximum value of the total moment under the combined action of dead and live loads. Moment $M_{1,u}$ under action of dead load is determined using the formula (41) and is

$$M_{1,u}(q) = u X_1 + \frac{qz_1^2 u(1-u)}{2} . \tag{57}$$

Under action of the live load (Fig. 8, d)

$$M_{1,u}(p) = \int_0^{z_1 + u_1^1 z_2} p(ILM_{1,u}) du . \tag{58}$$

Thus,

$$M_{1max} = \max_{0 < u < z_1} \left(u X_1 + \frac{qz_1^2 u(1-u)}{2} + M_{1,u}(p) \right) . \tag{59}$$

Parameters z_1, cEJ are numerically defined by iterate over the values with increment of 0.001 and 0.0001, respectively, until the conditions are fulfilled (1), (2).

The results of optimization of all beam types are summarized in Table 1 (in case of calculations without limitation of communality, single load density was accepted as $q=p=1\text{kN/m}$).

Table 1

Load	System type		z_1, m	x, m	$\frac{cEJ}{m^3},$ $\frac{\Delta EJ}{kNm^3}$ or k	M_{1max} kNm	$ M_{sup} ,$ kNm	M_{2max} kNm
	q	Statically determinate three-span beam	Hinge joints in the end spans	11.351	9.404		11.054	11.050
Hinge joints in the middle span			11.352	1.947		11.058	11.049	11.049
Continuous beam		With unilateral support connections	11.369		k 0.0271	10.994	10.996	10.989
		With displaced supports	11.351		$\frac{\Delta EJ}{495}$	11.053	11.053	11.052
		With resilient connections	11.351		$\frac{cEJ}{40.151}$	11.053	11.052	11.052
q_p	Statically determinate three-span beam	Hinge joints in the end spans	11.942	9.896		24.483	24.433	24.483
		Hinge joints in the middle span	11.005	2.049		24.470	24.465	24.465
	Continuous beam	With unilateral support connections	11.410		k 0.0431	25.750	25.749	25.814
		With displaced supports	11.444		$\frac{\Delta EJ}{403}$	25.732	25.726	25.727
		With resilient connections	11.351		$\frac{cEJ}{29.50}$	24.835	24.776	24.709

6. Conclusions

1. It has been shown that an optimal solution exists in the set of statically indeterminate systems under the action of dead load.

2. An optimal design can be part of the set of both statistically determinate, and indeterminate systems.

3. The optimal solution can be designed in the form of various options. The technical issues of making structures require further investigation to select the final version.

4. Under the action of dead and live mobile loads, the estimated stresses in different variants differ insignificantly.

REFERENCES

1. *Vinogradov A.I.* Problema optimalnogo proektirovaniia v stroitelnoi mekhanike (Problem of optimal design in structural mechanics). – Kh.: «Vyscha shkola», 1973. – 168 p.
2. *Kitov Yu., Verevicheva M., Vatulia G., Orel Ye, Deryzemlia S.* Design solutions for structures with optimal internal stress distribution // MATEC Web of Conferences, 2017. – Vol., No. 133. – p. 03001.
3. *R. Bellman*, Applied problem of dynamic programming (Science, 1965).
4. *Reitman, M.I.* Metody optimalnogo proektirovaniia deformiruemykh tel (Methods for the optimal design of deformable bodies) / M.I. Reitman, G.S. Shapiro. M.: Nauka, 1976. – 265 p.
5. *Gemintern, V.I.* Metody optimalnogo proektirovaniia (Methods for the optimal design) / V.I. Gemintern, B.M. Kagan – M.: Nauka, 1980. – 159 p.

6. *M. Zhou, G. Rozvany*, Comput Methods Appl Mech Eng, 89(1–3), 309–336, (1991).
7. *M. Bendsoe, N. Kikuchi*, Comput Methods Appl Mech Eng, 71(2), 197–224, (1988).
8. *Y. Xie, G. Steven*, Comput Struct, 49(5), 885–896, (1993).
9. *K. Choi, N. Kim*, Structural sensitivity analysis and optimization I-linear systems (Springer, 2005).
10. *Z. Luo, N. Zhang, Y. Wang, W. Gao*, Int J Numer Methods Eng 93(4), 443–464 (2013).
11. *Vasilkov G.V.* Evoliutsionnaia teoriia zhiznennogo tsikla mekhanicheskikh system. Teoriia sooruzhenii (Evolutionary theory of the life cycle of mechanical systems. Theory of structures) / G.V. Vasilkov – M.: Izdatelstvo LKI, 2008. – 320 p. (sinergetika: ot proshlogo k buduschemu).
12. *Kitov Yu.P., Vatulia G.L., Verevicheva M.A.* Nekotorye soobrazheniia o kriteriikh optimalnosti (Some considerations about optimal criteria) // Zb. nauk. prats. – Kh.: UkrDAZT. – 2014. – Vol. 143. – P. 124 – 131.
13. *Kitov, Yu.P.* Vliianie parametrov proektirovaniia na optimalnost konstruktсии stalnykh balok (Influence of design options on the structure optimality of steel beams) / Yu.P. Kitov, G.L. Vatulia // Zb. nauk. prats. – Kharkiv, UkrDAZT, 2011. – Vol. 125. – P. 24-33.
14. *Shmukler V.S.* Novye enegeticheskie principy ratsionalizatsii konstruktсии (New energy principles of structure rationalizations) // Zb. nauk. prats. –Kharkiv, UkrDUZT, 2017. – Вип. 167. – P. 54-69.
15. *Osnovy rascheta i proektirovaniia kombinirovannykh i stalebetonnykh konstruktсии* (Basics of calculation and design of composite and steel concrete constructions) / [Chikhladze E.D., Vatulia G.L., Kitov Yu.P. i dr.]; pod red. E.D. Chikhladze – Kiev: Transport Ukrainy, 2006. – 136 p.
16. *Gogol, M.V.* Proektuvannia i rozrakhunok kombinovannykh mostovykh perekhodiv (Design and calculation of composite bridge crossing) / M.V. Gogol, M.R. Bilskii, I.D. Peleshko // Mosty ta tuneli: teoriia, doslidzhennia, praktyka: zb. nauk. prats Dnipropetrovskogo nats. un-tu zaliznychnogo transport. – Dnipropetrovsk, 2012. – Vol. 3. – P. 33–38.

Стаття надійшла 7.02.2018

Ю.П. Кітов, М.А. Веревічева, Г.Л. Ватуля, С.В. Дериземля

КОНСТРУКТИВНІ РІШЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО І ТИМЧАСОВОГО РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Авторами статті була розглянута конструкція трипрогонового балочного моста заданої довжини під дією тимчасового навантаження. Метою даного дослідження є отримання рівномірної системи, в усіх елементах якої максимальні напруження дорівнюють розрахунковим. Було доведено, що оптимальні рішення існують як у множині статично визначених систем, так і статично невизначених.

Ключові слова: сталезалізобетонна балка, тимчасове навантаження, постійне навантаження, балочний міст, рівномірна система, оптимізація конструкції.

Ю.П. Кітов, М.А. Веревічева, Г.Л. Ватуля, С.В. Дериземля

КОНСТРУКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОСТОЯННОЙ И ВРЕМЕННОЙ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗОК

Авторами статьи была рассмотрена конструкция трехпролетного балочного моста заданной длины под воздействием временной нагрузки. Целью данного исследования является получение равнопрочной системы, во всех элементах которой максимальные напряжения равны расчетным. Для выбора оптимальной системы был рассмотрен ряд статически определимых и статически неопределимых систем. Было доказано, что оптимальные решения существуют как в множестве статически определимых систем, так и неопределимых.

Ключевые слова: сталезалезобетонная балка, временная нагрузка, постоянная нагрузка, балочный мост, равнопрочная система, оптимизация конструкции.

УДК 624.012.3

Кітов Ю.П., Веревічева М.А., Ватуля Г.Л., Дериземля С.В. **Конструктивні рішення оптимальних систем під дією постійного і тимчасового рухомого навантаження** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 124-139.

Розглядаються конструктивні можливі рішення оптимальних систем під дією зовнішнього навантаження.

Табл. 1. Лл. 8. Бібліогр. 16 назв.

UDC 624.012.3

Kitov Yu., Verevicheva M., Vatulia G., Deryzemlia S. **Design solutions of optimal systems under action of dead and live mobile load** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 124-139.

Authors describe some design solutions of optimal systems under external load.

Table 1. Fig. 8. Ref. 16.

УДК 624.012.3

Кітов Ю.П., Веревічева М.А., Ватуля Г.Л., Дериземля С.В. **Конструктивные решения оптимальных систем при действии постоянной и временной подвижной нагрузок** // Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборник. – К.: КНУСА, 2018. - Вып. 100. - С. 124-139.

Рассматриваются конструктивные возможные решения оптимальных систем под воздействием внешней нагрузки.

Табл. 1. Рис. 8. Библиогр. 16 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, КІТОВ Юрій Петрович.

Адреса робоча: 61050 Україна, м. Харків, площа Фейєрбаха 7, Український державний університет залізничного транспорту, КІТОВУ Юрію Петровичу.

Робочий тел.: +38(057) 730-10-70;

E-mail: budmekh@ukr.net

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, ВЕРЕВІЧЕВА Марина Анатоліївна.

Адреса робоча: 61050 Україна, м. Харків, площа Фейєрбаха 7, Український державний університет залізничного транспорту, ВЕРЕВІЧЕВІЙ Марині Анатоліївні

Робочий тел.: +38(057) 730-10-70

E-mail: budmekh@ukr.net

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор кафедри будівельної механіки і гідравліки, ВАТУЛЯ Гліб Леонідович.

Адреса робоча: 61050 Україна, м. Харків, площа Фейєрбаха 7, Український державний університет залізничного транспорту, ВАТУЛІ Глібу Леонідовичу.

Робочий тел.: +38(057) 730-10-05;

Мобільний тел.: +38(050) 300-77-70;

E-mail: glevvatulya@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3823-7201>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): аспірант кафедри будівельної механіки і гідравліки, ДЕРИЗЕМЛЯ Світлана Володимирівна.

Адреса робоча: 61050 Україна, м. Харків, площа Фейєрбаха 7, Український державний університет залізничного транспорту, ДЕРИЗЕМЛІ Світлані Володимирівні.

Робочий тел.: +38(057) 730-10-70

Мобільний тел.: +38(099) 482-97-99

E-mail: svetlana.deryzemlia@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6556-4454>

UDC 624.072

BUCKLING OF THE STEEL FRAMES WITH THE I-SHAPED CROSS-SECTION COLUMNS OF VARIABLE WEB HEIGHT

S.I. Bilyk,

Doctor of Technical Sciences, professor, Department of Steel and Wooden Structures

A.S. Bilyk,

candidate of technical sciences, assistant professor, Department of Steel and Wooden Structures

T.O. Nilova,

candidate of technical sciences, assistant professor, Department of Steel and Wooden Structures

V.Z. Shpynda ,

assistant, Department of Steel and Wooden Structures

E.I. Tsyupyn ,

assistant, Department of Steel and Wooden Structures

*Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture
Povitroflotskyi Ave., 31, Kyiv*

Abstract. Presented is the research of the stability of portal frames made of variable I cross-sections, depending on supports fastening factors and frames elements unfastening. In the process of mathematical research examined were five different cases of fixing columns nodes of portal frames resiliently mounted in each case, the stability criteria having been defined. In addition, conducted were studies to determine the coefficients of the portal frames elements effective length calculation in finding critical load on the column. Coefficients of the effective length factor of the welded variable I cross-section columns have been obtained. The influence of brace systems on stiffening of the whole structure, stability of the unit frames as well as the overall stability of the building with computer simulation and calculation have been studied, the coefficients of the influence of the frame structure on the stability of the unit frames having been obtained.

Keywords: variable cross-section; elastic fixed-support; effective length factor, portal frame; buckling of unit frame, load factor.

Introduction

The buckling of members of portal frame undoubtedly belongs to the important problems of designs of steel constructions [1, 53, 54, Timoshenko, S.P. (1908)]. The variable cross-section columns are an effective element. Therefore, today the research of stability loss and the theoretical research of Stability analysis of tapered elements should be more extensive. It is necessary to obtain more numerical examples of critical buckling load and to develop methods of calculating effective length factor.

Portal frames members buckling undoubtedly belongs to the range of important problems of steel constructions design [1, 5, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 25] and [33, 34, 35, 38, 45, 46, 48, 57, 58]. The variable cross-section columns are an effective element.

Therefore, development of a consistent buckling design procedure for tapered columns is great importance [28, 29, 41]. The first works of studying buckling analysis of elements of variable cross-section were written by Dynnyk A. and Morley A. [17, 18, 19, 34, 46]. A. Dynnyk has reduced the governing differential equation for buckling columns with variable cross-section to the linear

differential equations differential equation with variable coefficients. The solution of the governing equation is obtained due to Bessel functions by Gringhila method (The applications of elliptic functions (London, 1892). The main results of these studies were translated in English by Malets (1925) [34].

Today the Bessel functions used to solve problems of loss stability of tapered elements are well known [6, 7, 8]. Out-of-rotation plane bending vibrations of a rotating tapered beam with periodically varying speed are presented in work [13]: “the integro-partial differential equation of the beam is discredited via Galerkin's method and a set of ordinary differential equations with periodic coefficients (Mathieu–Hill type equations) is obtained”.

An approximate method was proposed for analyzing the problem of beams of variable cross-section in article [4, 20, 42].

Articles [21, 22, 23, 24, 25] present a number of stability problems for columns and simple frames that have a post and a variable cross-section of non-uniform members. A free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section studies in [30]. Buckling analysis of non-uniform and axially graded columns with varying flexural rigidity present in [3, 31, 35, 36, 39, 40, 44, 48]. The new numerical method is proposed [34] for the dynamic and stability analysis of elastic plane structures consisting of beams with constant width and variable depth. In this article [37] a generalized finite element for buckling analysis of tapered columns with various cross sections is established by using Chebyshev polynomial approach to the governing differential equation. The heterogeneous prismatic finite element with variable cross sectional area and taking into account the variability of components of metric tensor are presents in [10], prismatic finite element used for studies and analysis of non-uniform elements. In article [2] the solution of an ordinary differential equation of the fourth order with variable coefficients is used the approach using power series is given. The exact elastic stability functions for any general non-prismatic beam-column element with a uniform tensile or compressive axial force are obtained.

Bazeos, N. and Karabalis, D.L. [11] developed the approximate method for quick calculation of the critical load of tapered columns. The method is based on a series of dimensionless design-oriented charts related the critical load of linearly tapered columns of I-section to the taper ratio and boundary conditions.

Coşkun, S.B. and Atay, M.T. use variation iteration method for research critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections [16]. The work of Huang Y. and Li X.F. authors have reduced the governing differential equation for buckling of columns with varying flexural rigidity to Fredholm integral equation [31].

In the work [39] the buckling of a non-uniform column with spring supports under combined concentrated and distributed loads is presented. The governing equation for buckling of a one-step non-uniform column is reduced to Bessel equations and other solvable equations for 13 cases, several of which are important in engineering practices.

In the method [43] Ozay, G. and Topcu, A. proposed a general stiffness matrix for non-prismatic members that is applicable to Timoshenko beam theory has been derived. The stiffness coefficients have been determined for constant, linear, and parabolic height member's variations, employing analytical and numerical integration techniques.

Rezaiee-Pajand M., Shahabian F., Bambaeechee for simple frames presented methodology to determine critical load and effective length factor for buckling of a frame with tapered and prismatic columns [46]. The combined effect of the shape factor, taper ratio, elastic bracing system, and joint flexibility on the critical buckling load, buckling length factor of portal steel frames are considered.

In article [47] the method calculating of the critical buckling load of portal frames consisting of linearly tapered members is presented. Values of the factor of the estimated length of columns with fixed supports of portal frames The factor of the estimated length of the columns of the portal frame with hinged supports is obtained.

Elastic buckling loads of columns with variable cross-section has been studied due in the works [49, 50, 51, 52, 55].

In the research of Wei, D.J., Yan, S.X., Zhang, Z.P., and Li, X.F. [59] of critical load for buckling of non-prismatic columns under self-weight and tip force the governing equation subject to associated boundary conditions is transformed into an integral equation. Critical buckling load is then determined as the lowest value of the resulting integral equation.

A new shape function for tapered three-dimensional beams with flexible connections was obtained due to the analysis of Valipour, H.R. and Bradford, M.A. [56].

Non-linear post buckling analysis of frames and columns with was made in the works [5, 60, 61].

The effects of shear deformations are taken into account in the stability analysis for variable cross-section columns based on Timoshenko theory and the energy method in theoretical analysis [1, 10, 55].

These researches of rods buckling were conducted due to L. Euler's, the first work [26].

Foundation of the problem. Defining sustainability criteria and coefficients of the effective length of the elements of portal frames, taking into account elasticity of supports when calculating a flat buckling are important issue in designing of steel construction.

Methods of research. To research the buckling criteria of portal frames and calculating the coefficients of the effective length of columns mathematical modeling method was used. General view of the structure model is shown in Figure 1.

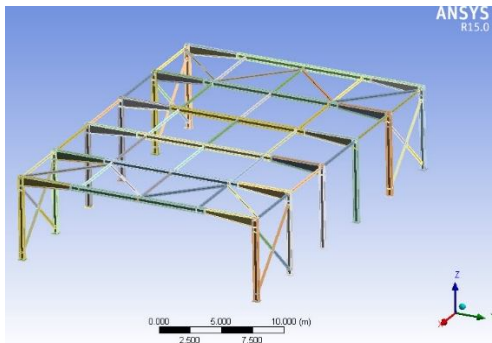


Fig. 1. General view of the model

Results. In Figure 2 was considered a portal frame (Figure 1) buckling resistance with the columns of I-shaped cross-section with variable web height and the girder with constant cross-section. The frame has a span – L and

column height – I . The column stiffness of I-shaped cross-section with variable web height considerably precise is written by the parabolic regularity if the

correlation of least cross-section moment inertia I_{xn} to the largest cross-section moment inertia I_{x0} is situated in diapason $I_{xn}/I_{x0} = 0.1 \dots 0.95$.

Five cases of buckling column with variable cross-section on elastic support were studied.

Function $I_{xz} = I_x(z)$ is the moment of inertia of the variable cross-section is approximation tapered columns with I -section for steel portal frames. The I_{xz} of the columns has approximation by the following parabolic function.

$$I_{xz} = I_x(z) = I_{x0}(1 - \gamma_y t_z)^2; \quad \gamma_y = 1 - I_{xn} / I_{x0}, \quad (1)$$

where I_{x0} – is a maximum moment of inertia of variable cross-section of member with coordinate $z_0 = 0$, I_{xn} – is moment of inertia with of minimum section dimensions, which has coordinate $z_n = l$.

We took the hypothesis: deformation of the column is satisfactorily described by the Bernoulli–Euler theory [53], and was acceptance the assumption that the load is applied only at the nodal points.

The bending moment at any cross section is

$$(\eta_z - \eta_0)N + M_{x0} - M_{xz} + \frac{Q_0 l z}{N} = 0, \quad (2)$$

where M_{xz} – bending moment at any cross section, M_{x0} – bending moment at cross section with coordinate $z_0 = 0$, N – is a constant axial compressive load, Q_0 – shear force at cross section with coordinate $z_0 = 0$, η_0 – displacement (deflection) cross section with coordinate $z_0 = 0$, η_z – displacement any cross section.

Governing equation of flexural deformation of the column of variable cross-section may be written as (of the member is approximated by the following parabolic function).

$$\eta''(1 - \gamma_y t_z)^2 + \eta_z \frac{Nl^2}{EI_{x0}} = \frac{Nl^2}{EI_{x0}} \eta_0 - \frac{M_{x0} l^2}{EI_{x0}} - \frac{Q_0 l^3}{EI_{x0}} t_z, \quad t_z = \frac{z}{l}, \quad k^2 = \frac{Nl^2}{EI_{x0}}, \quad (3)$$

$$\eta_z = \eta_0 - \sqrt{B_z} \frac{l}{v\gamma_y} \eta'_0 \sin(vu_z) + \left(\frac{M_{x0} l^2}{k^2 EI_{x0}} \left\{ \sqrt{B_z} \left[-\frac{1}{2v} \sin(vu_z) + \cos(vu_z) \right] - 1 \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{Q_0 l^3}{k^2 EI_{x0}} \left[\sqrt{B_z} \frac{1}{v\gamma_y} \sin(vu_z) + t_z \right], \quad \sqrt{B_z} = \sqrt{1 - \gamma_y t_z}, \right.$$

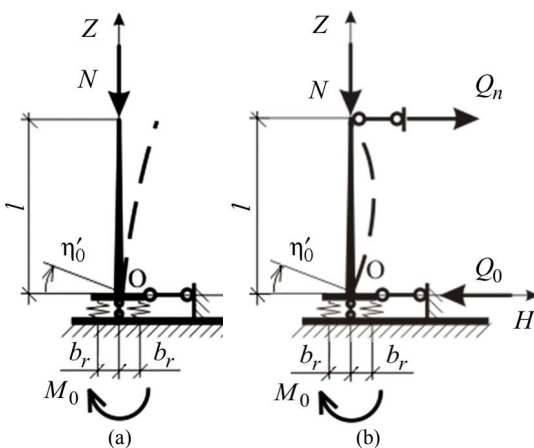


Fig. 2. Cases of resistance centrally compressed rods with variable cross section on elastic supports: (a) - case 1; (b) - case 2

$$u_z = \ln(1 - \gamma_y t_z), \quad u_n = \ln(1 - \gamma_y), \quad v^2 = k^2 / \gamma_y^2 - 0,25, \quad v^2 + 0,25 = k^2 / \gamma_y^2. \quad (4)$$

This homogeneous linear differential equation is second-order differential equations with variable coefficients. The general solution for these differential equations has analytical solution [6, 7, 8, 17, 18].

The general solution (4) written in form of method of initial parameters.

Was made studies for 5 cases stability of elastic rods with variable cross-section where columns have elastic support.

Case 1 (Fig. 2(a)). Column has elastic fixed-support for cross section with maximum dimensions ($z=0$) and free-end for cross section with minimum dimensions ($z=1$).

Boundary conditions are:

$$M_{xn} = 0, \quad Q_n = Q_0 = 0, \quad \eta_0 \eta = 0, \quad M_{x0} = -\frac{k_r b_r^2}{2} \eta'_0, \quad (5)$$

where b_r – the width of the base of the column, and k_r – the coefficient of rigidity of elastic fixed base, η'_0 – the rotation angle of cross section of elastic fixed-support.

The factor of elastic fixed-support may be written as:

$$b_{Er} = (EI_{x0} / l)(\eta'_0 / M_x) = EI_{x0} / (0,5l b_r^2 k_r). \quad (6)$$

The combination of boundary conditions (5) and the decision (4) provides stability loss equation to calculate the critical buckling load of column with varying cross-section (7).

$$\left(k^2 b_{Er} - \frac{\gamma_y}{2} \right) \cdot \frac{\text{tg}(v u_n)}{v \gamma_y} + 1 = 0. \quad (7)$$

Equation of stability (7) makes it possible to determine the stability factor and coefficient of effective length. If $k_r \rightarrow \infty$; $b_{Er} \rightarrow 0$; we have boundary conditions for column with varying cross-section with fixed support – free-end. Stability loss equation (7) gives stability loss equation for column with fixed-support – free-end

$$\frac{\text{tg}(v u_n)}{2v} - 1 = 0. \quad (8)$$

For variable cross-section column with fixed support – free-end were obtained factors effective length in Table 1.

Table 1

Effective length factor for variable cross-section column with fixed-elastic support and free-end. Case 1, (Fig. 2(a))

I_{xn}/I_{x0}	0,99	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10
$\mu_x, b_{Er}=0$	2,0003	2,107	2,209	2,366	2,491	2,704
$\mu_x, b_{Er}=0,033$	2,0669	2,169	2,268	2,419	2,54	2,747
$\mu_x, b_{Er}=0,33$	2,635	2,708	2,779	2,891	2,983	3,145
$\mu_x, b_{Er}=0,5$	2,918	2,981	3,043	3,141	3,223	3,365
$\mu_x, b_{Er}=1,0$	3,652	3,699	3,746	3,819	3,879	3,985
$\mu_x, b_{Er}=2,0$	4,809	4,843	4,876	4,928	4,971	5,046

Case 2 (Fig. 2(b)). Column has elastic fixed-support for cross section with maximum dimensions ($z=0$) and pin-ended (articulated) support for cross section with minimum dimensions ($z=1$).

Boundary conditions are:

$$M_{xn} = 0, \quad Q_n = Q_0, \\ \eta_0 = \eta_n = 0, \quad Q_0 l = 0,5k_r \eta'_0 b_r^2, \quad Q_0 l = -M_{x0}, \quad M_{x0} = -0,5k_r \eta'_0 b_r^2. \quad (9)$$

Stability loss criterion to calculate the critical buckling load for column with varying cross-section may be written:

$$(k^2 b_{Er} - \frac{\gamma_y}{2} + 1) \frac{\text{tg}(v u_n)}{v \gamma_y} + 1 = 0. \quad (10)$$

Effective length factor for variable cross-section column with fixed-elastic support and articulated-end is in table 2.

Table 2

Effective length factor for variable cross-section column
with fixed-elastic support and articulated-end

I_{xn}/I_{x0}	$\mu_x, b_{Er}=0$	$\mu_x, b_{Er}=0,5$	$\mu_x, b_{Er}=1,0$	$\mu_x, b_{Er}=2,0$
0,99	0,7009	0,9247	0,9584	1,0023
0,90	0,7177	0,9454	0,9804	1,0263
0,80	0,7389	0,9713	1,008	1,0564
0,70	0,7633	1,0011	1,04	1,0911
0,60	0,7921	1,0361	1,077	1,1319
0,50	0,8271	1,0782	1,122	1,1811
0,40	0,8711	1,1307	1,178	1,2428
0,30	0,9299	1,2002	1,252	1,3245
0,20	1,0164	1,3009	1,359	1,4434
0,10	1,1738	1,4802	1,5503	1,6555
0,01	1,7661	2,1179	2,2225	2,401

Case 3 (Fig. 3(a)). Column has fixed support for cross section with maximum dimensions ($z=0$) and articulated elastic support for cross section with minimum dimensions ($z=1$). η_n – displacement cross section with coordinate $z_n=1$, displacement of articulated elastic support. Coefficient of rigidity of elastic articulated support is k_{r3} . Boundary condition are the coefficient of rigidity of elastic fixed-base.

$$\eta_0 = \eta'_0 = 0, \quad M_{xn} = 0, \quad \eta_n \neq 0, \quad Q_0 = Q_n = -\eta_n k_{r3}. \quad (11)$$

Standard procedures connections connections equation Boundary condition and the general solution give the stability loss equation (criterion) to calculate the critical buckling load of column with varying cross-section. By using factor of elastic articulated support (6) – b_{Er} , was obtained the stability loss criterion:

$$\left[\frac{1}{(1 - k^2 / b_{E3})} - \frac{\gamma_y}{2} \right] \frac{\text{tg}(v u_n)}{\gamma_y v} + 1 = 0. \quad (12)$$

In table 3 effective length factor for variable cross-section column with fixed-support and elastic articulated support for $b_{E3} = 0 \dots 3.0$ were obtained.

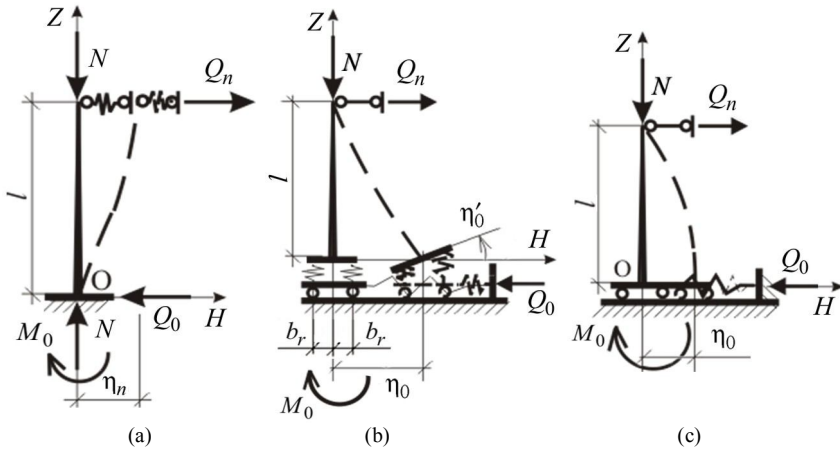


Fig. 3. Cases of resistance centrally compressed rods with variable cross section on elastic supports: (a) - case 3; (b) – case 4; (c) - case 5

Table 3
Effective length factor for variable cross-section column with fixed-support and elastic articulated support for $b_{E3}=0 \dots 3.0$ (case 3)

I_{xn}/I_{x0}	μ_x					
	$b_{E3}=0$	$b_{E3}=0,05$	$b_{E3}=0,1$	$b_{E3}=0,5$	$b_{E3}=1$	$b_{E3}=3$
0,99	0,70091	0,80758	0,99647	1,55882	1,73845	1,901
0,90	0,71772	0,81906	1,00456	1,57401	1,75817	1,926
0,80	0,73886	0,83412	1,01493	1,59273	1,78250	1,957
0,70	0,76330	0,85235	1,02724	1,61390	1,81005	1,992
0,60	0,79213	0,87486	1,04226	1,63827	1,84178	2,032
0,50	0,82708	0,90340	1,06130	1,66702	1,87921	2,080
0,40	0,87112	0,94093	1,08673	1,702122	1,92485	2,1382

Case 4 (Fig. 3(b)). Column has the mobile elastic fixed support with horizontal springy support for cross section with maximum dimensions ($z=0$) and articulated support for cross section with minimum dimensions ($z=l$). η_0 – displacement cross section with coordinate $z_0=0$, displacement of articulated elastic support. k_r – the coefficient of rigidity of elastic fixed-base. Coefficient of rigidity of horizontal springy support is k_{r2} . Boundary conditions are:

$$Q_0 = Q_n = +k_{r2}\eta_0, \quad \eta_n = 0, \quad M_{xn} = 0, \tag{13}$$

$$M_{x0} = -0,5k_r\eta_0^2 b_r^2, \quad -\eta_0 N + M_{x0} + Q_0 l = 0. \tag{14}$$

Recurrent formula for the relationship between the angle of rotation mobile elastic fixed support and deflection of horizontal springy support is:

$$-\eta_0 N + M_{x0} + Q_0 l = 0, \quad \eta_0 = \frac{0,5k_r b_r^2}{l \cdot k_{r2} - N} \cdot \eta_0'. \tag{15}$$

Substitute in equation (16) deflection of horizontal spring support on angle of rotation for mobile elastic fixed support by formula (19) leads to stability loss criterion of frame.

$$\left(\frac{k^2 (EI_{x0}/l)}{0,5b_r^2 k_r} + \frac{1}{1 - k^2 EI_{x0}/(k_{r2} l^3)} - \frac{\gamma_y}{2} \right) \cdot \frac{\text{tg}(v u_n)}{v \gamma_y} + 1 = 0. \quad (16)$$

If $k_{r2} \rightarrow \infty$; than boundary condition have form (9) and stability loss criterion (16) converted to stability loss equation of column (10) – case 2.

If $k_{r2} \rightarrow 0$; than stability loss criterion (16) converted to stability loss equation of column (7), – case 1.

Case 5 (Fig. 3(c)). Column has the mobile fixed support with horizontal spring support for cross section with maximum dimensions ($z=0$) and articulated support for cross section with minimum dimensions ($z=l$). η_0 – displacement cross section with coordinate $z_0=0$, displacement of articulated elastic support. Coefficient of rigidity of horizontal springy support is k_{r2} .

If in equation (16) put the condition $k_r \rightarrow \infty$; it gives stability loss criterion of column for case 5:

$$\left(\frac{1}{1 - k^2 EI_{x0}/k_{r2} l^3} - \frac{\gamma_y}{2} \right) \cdot \frac{\text{tg}(v u_n)}{v \gamma_y} + 1 = 0. \quad (17)$$

If in equation (17) put the condition $k_{r2} \rightarrow \infty$; than stability loss criterion column with fixed- support and free-end (7).

Present methodology obtain coefficient the effective length of portal frame to calculate the critical buckling load of column with varying cross-section.

Portal frame has columns with varying cross-section and rigid frame rafter with constant cross-section. Columns with varying cross-section of portal frame is elements, which have boundary condition: column has the mobile elastic fixed support and articulated support for cross section with minimum dimensions, k_r - the coefficient of rigidity of elastic fixed-base. Coefficient of rigidity of horizontal springy support is $k_{r2}=0$.

Critical buckling load on the column with varying cross-section of portal frame may be calculate by using equation (7) or (16) for $k_{r2} \rightarrow \infty$.

Critical buckling load of frame depends from factor of elastic fixed-support, the ratio of angle of rotation node joint rafter and column corresponding of bending which is acting in the node:

$$b_{Er} = \frac{EI_{x0st}}{h_{st}} \frac{\eta'_{0k}}{M_{xk}} = \frac{EI_{x0st}}{EI_{x0r}} \frac{l_r}{h_{st}} M_{\eta} \Psi_r, \quad \Psi_r = \int_0^l \frac{(1-z/l)^2}{(1-\gamma_y z/l)^2} dz, \quad (18)$$

where: M_{xk} – bending moment in node, which is acting due to loss stability of frame of asymmetric shape; η'_{0k} – the angle of rotation node joint rafter and column, is acting from loss stability steel frame of asymmetric shape; h_{st} – length of column of frame; E modulus of elasticity of steel; I_{x0st} – maximum moment of inertia of variable cross-section of column.

The coefficient ψ_r is the integral parameter of the stiffening cornice units of the jamming of the column in the cornice units, and determined by integrating of (18,19), takes into account the cross section of the rafter in determining the cornice unit rotation angle.

$$\psi_r = l \frac{1}{\gamma_y^3} \{-(\gamma_y - 1) - 2(\gamma_y - 1) \ln(1 - \gamma_y) + \gamma_y\} - l \frac{1}{\gamma_y^3} (\gamma_y - 1)^2 \dots \quad (19)$$

Performed numerical study of effective length factor of columns with varying cross-section of portal frame due loss stability of frame of asymmetric shape Table 4.

Table 4

Effective length factor of column of portal frame ($EI_{x0st}/EI_{x0r}=1,0$;
length of column $H=4 \dots 8$ m), case 1

$\frac{I_{xnst}}{I_{x0st}} = \frac{I_{rxn}}{I_{rx0}}$	$EI_{x0st}l_r / EI_{x0r}h_{st}$		
	1,0	2,0	3,0
0,999	2,6348	3,18	3,652
0,9	2,671	3,2219	3,7
0,8	2,712	3,27	3,755
0,7	2,759	3,323	3,816
0,6	2,812	3,387	3,8865
0,5	2,876	3,46	3,969
0,4	2,952	3,54	4,07
0,3	3,05	3,61	4,198
0,25	3,112	3,732	4,277
0,2	3,187	3,817	4,373
0,1	3,4135	4,073	4,66

It is also proposed to review the work frame structures with two-hinged frames of I-section with respect to the passage length to the height of racks of 1: 3 in terms of the spatial loss of stability in the composition of buildings and structures. The horizontal elements of bond systems should be computed not only for external transverse loads, but for additional efforts that occur in the compressed-bent frame widths[61]:

$$S_e = S_0 + S_{fic} \quad (20)$$

where: S_0 – efforts by external loads, S_{fic} – additional efforts at buckling frame of structures.

To find the total value of the load on the brace system it is necessary to calculate the value of the longitudinal force at unfastening. Since the materials and methods for determining the factors influence the structure of the whole structure for the stability of individual diameters practically no numerical studies have been conducted in the software package ANSYS by using calculation modules «Static Structural» and «Linear Buckling». Module «Linear Buckling» allows finding the critical value of the load in the design and getting graphical chart deformations in various forms of stability loss.

To obtain data on the critical load values (P_{buckling}) 11 models with different number of frames and brace systems of structures have been built and designed. Computational models can be divided into the following main groups:

- Frames without brace system;
- Frames with brace systems on the building ends.

This distribution calculation models performed are aimed at determining the effect of different types of brace systems or their absence on individual frames and building stability as a whole.

Let us consider the calculation of the results and analyze deformed buckling diagram of the building frame shown in Figure 4 and Figure 5.

Without brace system in the structure, buckling of unit frame leads to deformations of other frames, namely:

- deformation of the elements of restraint;
- buckling of other major load-bearing elements of the building structure.

For the structures with bracing system at the ends, shape of buckling of a single frame is different: the buckling of the frame occurs by one half-wave sine wave between points of restraint from the plane. The value of the critical load on the system is increased by 25% in comparison with a similar system without constraints.

These results demonstrate the necessity of the calculation of brace system not only for the action of the external loads effect, but for the perception of additional lateral forces [S_{fic}] to provide the necessary rigidity and overall stability of the entire building.

To facilitate iterations in the software package, the critical load is calculated according to the equation [62]:

$$P_{\text{buckling}} = P_{\text{actual}} \cdot \lambda, \quad (28)$$

P_{buckling} – critical load; P_{actual} – actual load; λ – load factor (load multiplier).

Figure 6 shows depending λ of the number of frames for structures without brace systems, and with brace systems at the ends of the building.

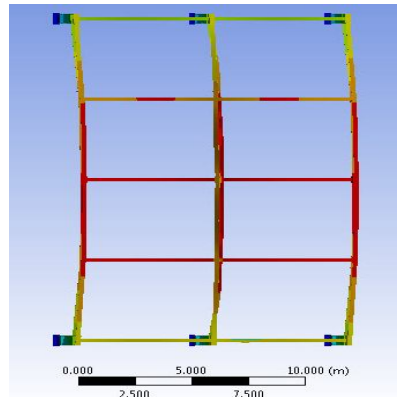


Fig. 4. Buckling shape of the frames in the structure without brace system

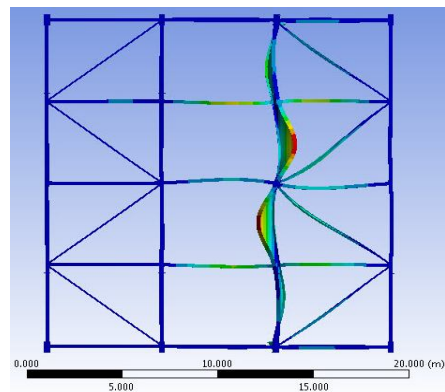


Fig. 5. Buckling shape of the frames in the structure with brace system on the ends of building

Figure 6 clearly demonstrates the impact spatial stiffness of building structure on the critical load for a particular frame. The difference between the critical load values for different layout options ranges from 16% (for structures with 6 frames) to 67% (for structures with two frames).

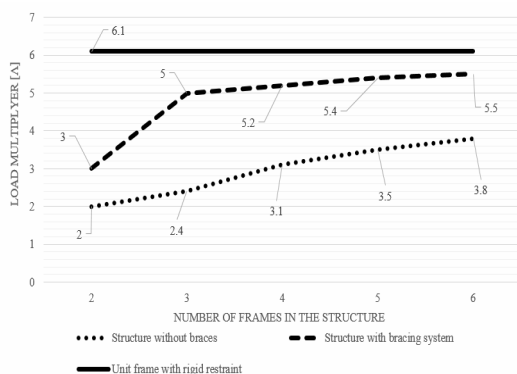


Fig. 6. Graph of the relationship between the critical load factor and number of frames in the longitudinal direction of the building

Conclusions. Buckling of a portal frame is very important problem of design steel constructions, composed of members with variable cross-section.

In this paper, study the elastic stability of the column with of variable cross-section.

For portal frames is presented methodology to determine critical load and effective length factor for buckling of a frame with tapered and with prismatic columns.

The buckling of columns with varying cross-section of portal frames results in the stability loss of frame asymmetric shape or symmetric shape.

The buckling columns with varying cross-section of portal frame causes the necessity to consider cases of buckling columns with the mobile elastic fixed support with horizontal springy support for cross-section with maximum dimensions $z=0$, and articulated support for cross-section with minimum dimensions, $z=l$.

Critical buckling load of frame depends on the factor of elastic fixed-support that in its turn depends on the ratio of joint rafter and column node rotation angle corresponding to bending acting in the node.

This simple method in the first design of steel frame makes it possible to obtain effective length factor of column variable cross-section of portal frame.

The formulation of the problem is based on the exact solution of the governing equations for buckling.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A. Budivelna mekhanika i teoriia sporud. Narysy z istorii (Construction mechanics and the theory of structures. Essays on history) / V.A. Bazhenov, Yu.V. Vorona, A.V. Perelmuter. – K.: Karavela, 2016. – 428 p. (in Ukrainian)
2. Al-Sadder, S.Z. (2004). "Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam-column member". Journal of Constructional Steel Research, Vol. 60, No. 11, pp. 1561–1584.

3. Al-Sarraf, S.Z. (1979). "Elastic instability of frames with uniformly tapered members."). *Structural Engineer*, Vol. 57, No. 13, pp. 18–24.
4. Arbabi, F. and Li, F. (1991). "Buckling of variable cross-section columns: integral-equation approach."). *Journal of Structural Engineering*, Vol. 117, No. 8, pp. 2426–2441, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1991)117:8(2426).CrossRef
5. Avraam, T. P. and Fasoulakis, Z.C. (2013). "Nonlinear postbuckling analysis of frames with varying cross-section columns.". *Engineering Structures*, Vol. 56, pp. 1–7, DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.04.010.CrossRef
6. Bilyk S.I. Effective length of elements of steel frames from developed I-beams with variable height of wall / S.I. Bilyk // *Strength of materials and theory of structures*. - K.: Budivelnik, 1989. - Vip. 55. - P. 93-96.
7. Bilyk S. I. Stability analysis of bisymmetrical tapered I-beams / S. I. Bilyk // *Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures Proceeding of the XI international conference on metal structures (ICMS–2006): Pzeszow, Poland, 21–23 June 2006-p. – Pzeszow, 2006. – C.254–255.*
8. Leites SD Stability of elastic fixed compressed bars, the stiffness of which varies according to a power law / Leites S.D. // *Materials on metal structures*. - M.: Stroyizdat, 1973. - Vol. 17. - P. 127-148.
9. Banerjee, J.R. (1987). "Compact computation of buckling loads for plane frames consisting of tapered members." *Advances in Engineering Software*, Vol. 9, No. 3, pp. 162–170.
10. Bazhenov V. The heterogeneous prismatic finite element with variable crosssectional area and taking into account the variability of components of metric tensor / V. Bazhenov, A. Shkrii', S.Piskunov, D.Bogdan // *Strength of Materials and Theory of Structures*. – 2010. – Issue. 85. – P. 3- 22.
11. Bazeos, N. and Karabalıs, D. L. (2006). "Efficient computation of buckling loads for plane steel frames with tapered members.". *Engineering Structures*, Vol. 28, No. 5, pp. 771–775, DOI: 10.1016/j.engstruct.2005.10.004.CrossRef
12. Bleich, F. (1952). *Buckling strength of metal structures* (1st ed.), McGraw Hill Text.
13. Bulut, G. (2013). "Effect of taper ratio on parametric stability of a rotating tapered beam.". *European Journal of Mechanics- A/Solids*, Vol. 37, pp. 344–350.
14. Chan, S. L. (1990). "Buckling analysis of structures composed of tapered members.". *Journal of Structural Engineering*, Vol. 116, No. 7, pp. 1893–1906.
15. Chen, W.F. and Lui, E. M. (1991). *Stability Design of Steel Frames* (1st ed.), CRC Press. CRC Press, 1991. P.394
16. Coşkun, S.B. and Atay, M.T. (2009). "Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method.". *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 11–12, pp. 2260–2266.
17. Dynnyk A. Using Bessel functions for tasks The theory of elasticity. Part 2: vibration theory/ AN Dynnyk. - Ekaterinoslav: Printing house E. I. Kogan, 1915. - 137 p.
18. Dynnyk A.N. Longitudinal bending and its application in engineering / AN Dynnyk, VN Leskov. - Kharkiv-Dnipropetrovsk: Tech. published., 1932. - 164 p.
19. Dynnyk A. Stability of elastic systems / A.N. Dynnyk. - M.: ONTI, 1935. -183 p.
20. Eisenberger, M. and Reich, Y. (1989). "Static, vibration and stability analysis of non-uniform beams.". *Computers and Structures*, Vol. 31, No. 4, pp. 567–573.
21. Ermopoulos, J.C. (1986). "Buckling of tapered bars under stepped axial loads.". *Journal of Structural Engineering*, Vol. 112, No. 6, pp. 1346–1354.
22. Ermopoulos, J.C. (1988). "Slope-deflection method and bending of tapered bars under stepped loads.". *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 11, No. 2, pp. 121–141.
23. Ermopoulos, J.C. (1997). "Equivalent buckling length of non-uniform members.". *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 42, No. 2, pp. 141–158.
24. Ermopoulos, J.C. (1999). "Buckling length of non-uniform members under stepped axial loads.". *Computers and Structures*, Vol. 73, No. 6, pp. 573–582.
25. Ermopoulos, J.C. and Kounadis, A. N. (1985). "Stability of frames with tapered built-up members.". *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, No. 9, pp. 1979–1992.
26. Euler, L. (1778). *Die altitudinocolomnarum sub proprio pondere corrueuntium*, Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae (in Latin).
27. Fraser, D.J. (1983). "Design of tapered member portal frames.". *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 3, No. 3, pp. 20–26.
28. Galambos, T.V. Surovek A. Structural stability of steel: concepts and applications for structural engineers / Theodore Galambos, Andrea Surovek./ Copyright © 2008 John Wiley & Sons, Inc. P.373.
29. Gere, J.M. and Carter, W.O. (1962). "Critical buckling loads for tapered columns.". *Journal of*

- the Structural Division, Vol. 88, No. 1, pp. 1–12.
30. Huang, Y. and Li, X.-F. (2010). “A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section.”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 11, pp. 2291–2303.
 31. Huang, Y. and Li, X.-F. (2011). “Buckling analysis of nonuniform and axially graded columns with varying flexural rigidity.”. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 137, No. 1, pp. 73–81.
 32. Iremonger, M.J. (1980). “Finite difference buckling analysis of nonuniform columns.”. *Computers and Structures*, Vol. 12, No. 5, pp. 741–748.
 33. Karabalis, D.L. and Beskos, D.E. (1983). “Static, dynamic and stability analysis of structures composed of tapered beams.”. *Computers and Structures*, Vol. 16, No. 6, pp. 731–748.
 34. Konstantakopoulos, T.G., Raftoyiannis, I.G., and Michaltsos, G.T. (2012). “Stability of steel columns with non-uniform cross-sections.”. *The Open Construction and Building Technology Journal*, Vol. 6, pp. 1–7.
 35. Kounadis, A.N. and Ermopoulos, J.C. (1984). “Postbuckling analysis of a simple frame with varying stiffness.”. *ActaMechanica*, Vol. 54, No. 1, pp. 95–105.
 36. Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Kim, I.J. (2006). “Buckling loads of columns with constant volume.”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, Nos. 1–2, pp. 381–387.
 37. Li, G.Q. and Li, J.J. (2004). “Buckling analysis of tapered lattice columns using a generalized finite element.” *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, No. 5, pp. 479–488.
 38. Li, G.Q. and Li, J.J. (2000). “Effects of shear deformation on the effective length of tapered columns with I-section for steel portal frames.”. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 20, pp. 479–489.
 39. Li, Q.S. (2000). “Buckling of elastically restrained non-uniform columns.”. *Engineering Structures*, Vol. 22, No. 10, pp. 1231–1243.
 40. Li, Q.S. (2003). “Buckling analysis of non-uniform bars with rotational and translational springs.”. *Engineering Structures*, Vol. 25, No. 10, pp. 1289–1299.
 41. Marques, L., Taras, A., Simões da Silva, L., Greiner, R., and Rebelo, C. (2012). “Development of a consistent buckling design procedure for tapered columns.”. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 72, pp. 61–74.
 42. O'Rourke, M. and Zebrowski, T. (1977). “Buckling load for non-uniform columns.” *Computers and Structures*, Vol. 7, No. 6, pp. 717–720.
 43. Ozay, G. and Topcu, A. (2000). “Analysis of frames with non-prismatic members.”. *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 27, No. 1, pp. 17–25.
 44. Qiusheng, L., Hong, C., and Guiqing, L. (1995). “Stability analysis of bars with varying cross-section.” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, No. 21, pp. 3217–3228.
 45. Raftoyiannis, I.G. (2005). “The effect of semi-rigid joints and an elastic bracing system on the buckling load of simple rectangular steel frames.”. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 61, No. 9, pp. 1205–1225.
 46. Rezaiee-Pajand, M. Shahabian, F., Bambaeechee, M. Stability of non-prismatic frames with flexible connections and elastic supports. *KSCCE Journal of Civil Engineering* March 2016, Volume 20, No. 2, pp 832–846.
 47. Saffari, H., Rahgozar, R., and Jahanshahi, R. (2008). “An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members.”. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 64, No. 4, pp. 400–406.
 48. Seyranian, A.P., Elishakoff, I. *Modern Problems of Structural Stability*. Springer Science & Business Media, 2003. P. 394.
 49. Shooshtari, A. and Khajavi, R. (2010). “An efficient procedure to find shape functions and stiffness matrices of nonprismatic Euler-bernoulli and timoshenko beam elements.”. *European Journal of Mechanics A-Solids*, Vol. 29, No. 5, DOI: 10.1016/j.euromechsol.2010.04.003.
 50. Siginer, A. (1992). “Buckling of columns of variable flexural rigidity.” *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 3, pp. 640–643.
 51. Smith, W.G. (1988). “Analytic solutions for tapered column buckling.”. *Computers and Structures*, Vol. 28, No. 5, pp. 677–681.
 52. Taha, M. and Essam, M. (2013). “Stability behavior and free vibration of tapered columns with elastic end restraints using the DQM method.”. *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 4, No. 3, pp. 515–521.
 53. Timoshenko, S. P. (1908). *Buckling of bars of variable cross section*, Bulletin of the Polytechnic Institute, Kiev, Ukraine.
 54. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (2009). *Theory of elastic stability*, Dover Publications.

55. Su L., Attard M. In plan stability of variable cross-section columns with shear deformations/ From Materials to Structures: Advancement through Innovation/ CRC Press, p.207-212
56. Valipour, H.R. and Bradford, M.A. (2012). "A new shape function for tapered three-dimensional beams with flexible connections." Journal of Constructional Steel Research, Vol. 70, pp. 43–50, DOI: 10.1016/j.jcsr.2011.10.006.CrossRef
57. Wang, C.K. (1967). "Stability of rigid frames with nonuniform members." Journal of the Structural Division, Vol. 93, No. 1, pp. 275–294.
58. Wang, C.M. and Wang, C.Y. (2004). Exact Solutions for Buckling of Structural Members (1st ed.), CRC Press. P. 224 CRC Press, 2004. P. 224 .
59. Wei, D.J., Yan, S.X., Zhang, Z.P., and Li, X.F. (2010). "Critical load for buckling of non-prismatic columns under self-weight and tip force." Mechanics Research Communications, Vol. 37, No. 6, pp. 554–558.
60. Bilyk S., Tonkacheiev V. / Determining sloped load limits inside von mises' truss with elastic support/Journal Materiali in tehnologije / Materials and Technology/. Volume 52, N0.2, Mar.-Apr. 2018, pp. 105-110. doi:10.17222/mit.2016.083
61. Bilyk S. Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data // Підводні технології. Промислова та цивільна інженерія. міжнар. наук.-вироб. журн. К., КНУБА, Вип.04/2016, С.89-96. library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/12/201604.pdf
62. ANSYS Mechanical User's Guide/ ANSYS, Inc.,2013 – pp.192-196.

Стаття надійшла 23.05.2018

Білик С.І., Білик А.С., Нілова Т.О., Шпінда В.З., Цюпин Є.І.

СТІЙКІСТЬ СТАЛЕВИХ РАМ ІЗ ДВОТАВРІВ ІЗ ЗМІННОЮ ВИСОТОЮ СТІНКИ

Представлено дослідження стійкості сталевих порталних рам з двотаврів зі змінною висотою стінки. Залежно від жорсткості вузлів і умов закріплення елементів в рамах досліджено стійкість колон. Пропонується підхід для визначення стійкості рам через стійкість колон на пружних опорах. Жорсткість вузлів і пружність опор визначається із статичного розрахунку рами. Розглянуто п'ять різних випадків стійкості пружних стрижнів при різних крайових умовах закріплення колон на пружних опорах. Проведено чисельні дослідження коефіцієнтів розрахункової довжини елементів порталних рам при змінності перерізу і жорсткості колон. Розвинений підхід до визначення стійкості елементів рам з площини рам залежно від податливості системи в'язів, проведений аналіз стійкості будівлі з комп'ютерним моделюванням і з обчисленням коефіцієнтів стійкості, фактору впливу системи в'язів рами на стійкість ригелів з площини порталних рам.

Ключові слова: змінне поперечний переріз; пружні опори; ефективна розрахункова довжина, коефіцієнт розрахункової довжини колон рам, вигин рами, фактор навантаження.

Білык С.І., Білык А.С., Нілова Т.А., Шпінда В.З., Цюпин Е.І.

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЛЬНЫХ РАМ С ДВУТАВРОВ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТОЙ СТЕНКИ.

Представлено исследование устойчивости стальных порталных рам из двутавров с переменной высотой стенки. В зависимости от жесткости узлов и условий закрепления элементов в рамах исследована устойчивость колонн. Предлагается подход для определения устойчивости рам через устойчивость колонн на упругих опорах. Жесткость узлов и упругость опор определяется из статического расчета рамы. Рассмотрено пять различных случаев устойчивости упругих стержней при различных крайевых условиях закрепления колонн на упругих опорах. Приведены численные исследования коэффициентов расчетной длины элементов порталных рам при переменности сечения и жесткости колонн. Развита методика определения устойчивости элементов рам из плоскости рам в зависимости от податливости системы связей, проведен анализ устойчивости здания с компьютерным моделированием и с вычислением коэффициентов устойчивости, фактора влияния системы связей рамы на устойчивость ригелей из плоскости порталных рам.

Ключевые слова: переменное поперечное сечение; упругие опоры; эффективная расчетная длина, коэффициент расчетной длины колон рам, изгиб рамы, фактор нагрузки.

УДК 624.072

Білик С.І., Білик А.С., Нілова Т.О., Шпинда В.З., Цюпин Є.І. Стійкість сталевих рам із двотаврів із змінною висотою стінки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 140-154.

Приведена методика і проведено чисельні дослідження коефіцієнтів розрахункової довжини елементів порталних рам при змінності перерізу і жорсткості колон. Показано визначення фактора стійкості елементів рам з їх площини в залежності від піддатливості системи в 'язів.

Табл. 4. Лл.6. Бібліогр. 62 назв.

UDC 624.012.3

Bilyk S.I., Bilyk A.S., Nilova T.O., Shpynda V.Z., Tsyupyn E.I. Buckling of the steel frames with the I-shaped cross-section columns of variable web height // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 140-154.

Coefficients of the effective length factor of the welded variable I cross-section columns have been obtained.

Table 4. Fig. 6. Ref. 62.

УДК 624.012.3

Бильк С.І., Бильк А.С., Нілова Т.А., Шпинда В.З., Цюпин Є.І. Устойчивость стальных рам с двутавров с переменной высотой стенки. // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. – Вип. 100. – С. 140-154.

Приведена методика и численные исследования коэффициентов расчетной длины элементов порталных рам при переменности сечения и жесткости колонн. Описан подход к определению устойчивости элементов рам из плоскости рам в зависимости от податливости системы связей.

Табл. 4. Рис. 6. Библиогр. 62 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук професор, професор кафедри металевих та дерев'яних конструкцій, завідувач кафедри металевих та дерев'яних конструкцій КНУБА Білик Сергій Іванович.

Робочий тел.: +38(044) 241-55-56

Мобільний тел.: +38(067) 588-8-295

E-mail: vartist@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій КНУБА Білик Артем Сергійович.

Робочий тел.: +38(044) 241-55-56

Мобільний тел.: +38(050) 765-23-54

E-mail: abilyk@uscc.com.ua

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій КНУБА Нілова Тетяна Олексівна

Робочий тел.: +38(044) 241-55-56

Мобільний тел.: +38(068) 128-30-62

E-mail: tatic70@gmail.com

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): асистент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій КНУБА Шпинда Вадим Зиновьевич

Робочий тел.: +38(044) 241-55-56

Мобільний тел.: +38(067) 47 55-737

E-mail: nevadim17@gmail.com

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): асистент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій КНУБА Цюпин Євген Іванович.

Мобільний тел.: +38(063) 280-93-62

E-mail: standartbc@gmail.com

УДК 539.3

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ

А.О. Краснеєва

*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

Дана робота присвячена побудові ефективного алгоритму для розв'язування плоскої задачі теорії пружності для областей певної форми (прямокутник, що з одного із боків обрізаний деякою кривою Γ) на основі узагальненого методу прямих.

Ключові слова: метод прямих, область неканонічної форми, проекційний метод, редуковані рівняння.

Вступ. В роботі Канторовича [1], був запропонований наближений чисельно-аналітичний підхід до розв'язання двовимірних задач математичної фізики, який потім в роботах багатьох авторів був розвинений в чисельно-аналітичний метод прямих [3] [4] [5]. Головна ідея методу прямих полягає в виконанні двох етапів розв'язання двовимірних задач на першому етапі по одній координаті за допомогою метода скінченних різниць знижується вимірність вихідної двовимірної задачі, а на другому система одновимірних редукованих рівнянь розв'язується аналітично, або за допомогою наближених методів. При цьому головна проблема виникає в побудові загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь. Маючи такий розв'язок, як показав Канторович Л.В. [1], можна використовуючи граничні умови вздовж граничної кривої, що обмежує область складної форми, побудувати наближений розв'язок відповідної задачі [6].

В роботах [7] [8] запропоновано узагальнення метода прямих, в якому два етапи розв'язання двовимірних задач поміняно місцями. На першому етапі замість чисельного методу скінченних різниць для зниження вимірності вихідних рівнянь запропоновано застосовувати проекційний метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова [9] на другому-сучасні чисельні методи розв'язування граничної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь.

В наших роботах [10] [11] запропоновано загальний алгоритм для розв'язування на основі узагальненого методу прямих плоских задач теорії теплопровідності та теорії пружності для областей неканонічної форми.

Мета: побудувати більш ефективний алгоритм для розв'язування плоскої задачі теорії пружності для областей спеціальної форми (прямокутник, що з одного із боків обрізаний деякою кривою Γ).

Основна частина. В якості вихідних рівнянь розглядаємо систему рівнянь плоскої задачі теорії пружності у вигляді системи рівнянь в частинних похідних першого порядку відносно невідомих $\tilde{u}(x, y)$, $\tilde{v}(x, y)$, $\sigma_x(x, y)$ $\tau_{xy}(x, y)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_x \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tau_{xy} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y. \end{array} \right. \quad (1)$$

Компоненти тензора деформації тут виключені за допомогою алгебраїчних рівнянь закону Гука, а напруження σ_y далі виключається зі системи рівнянь за допомогою співвідношення:

$$\sigma_y = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_x, \quad (2)$$

оскільки з відповідного співвідношення для σ_y можна виключити $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ за допомогою першого рівняння системи (1). Також тут прийнятно для переміщень використовувати позначення $\tilde{u} = \mu u$, $\tilde{v} = \mu v$.

Розглядається область D двовимірного простору, обрізана з одного торця довільною кривою Γ (рис. 1).

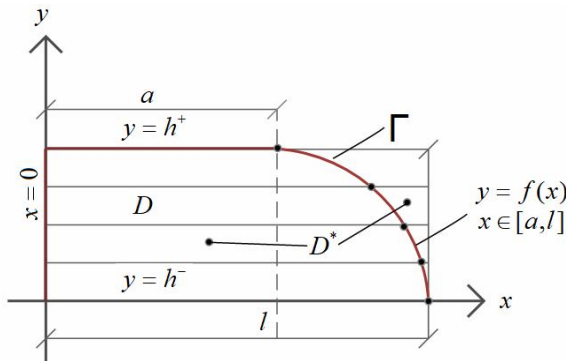


Рис. 1

Як звичайно, на область D наноситься система паралельних прямих зі сталим (або звичайним) кроком $\Delta = \frac{h^+ - h^-}{N-1}$, де N – кількість прямих включно з граничними $y = h^-$, $y = h^+$. Область D занурюється в прямокутну область $D^* = [0 \leq x \leq l] \otimes [h^- \leq y \leq h^+]$ та вихідні рівняння теорії пружності, визначені на області D , поширюються на область D^* неперервним чином і далі розглядаються на області D^* .

Для зниження вимірності вихідних рівнянь (1) використовується проєкційний метод. В якості базисних функцій використовуються локально зосередженні функції, пов'язані з вибором прямих на області D^* [10].

На ділянках граничних ліній $y = h^-$, $y = h^+$ розглядаються граничні умови загального вигляду [10], які в результаті зниження вимірності за допомогою проєкційного методу потрапляють в праву частину редукованих рівнянь. Граничні умови на вертикальному відрізку $x = 0$, прийняті в загальній формі, є природними граничними умовами, що є необхідною умовою для застосування проєкційного методу Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Ці умови редукуються по координаті y і в результаті записуються у вигляді:

$$C_0 (\bar{Y}(0) - \bar{\Phi}_0) = 0, \quad (3)$$

де $\bar{Y}(x)$ – загальний розв'язок редукованої системи звичайних диференціальних рівнянь, $\bar{\Phi}_0$ – вектор редукованих заданих граничних умов при $x = 0$. Матриця C_0 має вигляд:

$$C_0 = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} \end{bmatrix}.$$

Тут слід зазначити, що в якості невідомих редукованих рівнянь прийнято коефіцієнти в розкладі невідомих функцій по основному базису, тобто $u(x, y) \rightarrow u^i(x)$, оскільки

$$u(x, y) \approx u^1(x)\varphi_1(y) + u^2(x)\varphi_2(y) + \dots + u^N(x)\varphi_N(y) = u^i(x)\varphi_i(y), \quad i = \overline{1, N}.$$

В останньому співвідношенні використовується узгодження Ейнштейна – по індексу, що повторюється в двочленному добутку, передбачається підсумовування в межах визначення індекса. Відповідно

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, y) &\approx \tilde{v}^i(x)\varphi_i(y), \\ \sigma_x(x, y) &\approx \sigma_x^i(x) \cdot \varphi_i(y), \\ \tau_{xy}(x, y) &\approx \tau_{xy}^i(x) \cdot \varphi_i(y). \end{aligned}$$

Редуковані рівняння з невідомими $\tilde{u}^i, \tilde{v}^i, \sigma_x^i, \tau_{xy}^i$ будемо називати рівняннями в коефіцієнтах. Ці рівняння, записані у формі Коші, мають вигляд:

$$\frac{d\bar{Y}(x)}{dx} = A(x)\bar{Y}(x) + \bar{F}, \quad (4)$$

де

$$\bar{Y}(x) = \begin{bmatrix} u^{*i}(x) \\ v^{*i}(x) \\ \sigma_x^i(x) \\ \tau_{xy}^i(x) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix},$$

$$a_{12} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ij} b_{ij}, \quad a_{13} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_x^i,$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= -g^{ij} b_{ij}, \quad a_{24} = \sigma_x^i, \\
 a_{31} &= \frac{ky^-x}{\mu} g^{i1} + \frac{ky^+x}{\mu} g^{iN}, \quad a_{34} = g^{ij} b_{ij}, \\
 a_{42} &= \frac{ky^-y}{\mu} g^{i1} \cdot \sigma_x^1 + \frac{ky^+y}{\mu} g^{iN} \cdot \sigma_x^N + a_{13} = \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ij} \cdot b_{ij} + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ij} \cdot b_{ij} \cdot g^{\alpha\beta} \cdot b_{\beta\gamma}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

На відмінність від алгоритму, розвиненому в нашій роботі [10], де шукається загальний розв'язок задачі (3) будемо шукати розв'язок задачі:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{Y}(x)}{dx} = A(x)\bar{Y}(x) + F(x) \\ C_0(\bar{Y}(0) - \bar{\Phi}_0) = 0, \quad x \in [0, l], \end{cases} \quad (6)$$

тобто загальний розв'язок системи рівнянь, що задовольняє граничним умовам на лівому торці. Такий розв'язок зменшує порядок фундаментальної системи розв'язків вдвічі і будується за алгоритмом Годунова С.К. [2] з використанням ортогоналізації фундаментальної системи розв'язків та часткового розв'язку неоднорідних рівнянь в певних точках (призначені точки ортогоналізації) на відрізку $[0, l]$. В зв'язку з цим в кожній точці ортогоналізації будується фундаментальна матриця Z розміром $4N \times 2N$ (замість $4N \times 4N$ в загальному алгоритмі [11]) та вектор \bar{Z}_0 вимірності $4N$.

Шуканий загальний розв'язок визначається співвідношенням

$$\bar{Y}(x_k) = Z(x)\bar{b}(x_k) + \bar{Z}_0(x_k), \quad x_k \in [0, l], \quad x_0 = 0, \quad x_l = l, \quad (7)$$

де x_k - координата точки ортогоналізації. Тут $\bar{b}(x_k)$ – вектор довільних сталих, який залежить від точки ортогоналізації. Його вимірність вдвічі менша за вимірність аналогічного вектору \bar{b} загального алгоритму.

Для того, щоб з множини часткових розв'язків редукованої задачі виділити єдиний розв'язок, що задовольняє граничним умовам в усіх точках границі, включно з граничними умовами на ділянці $[a, l]$, необхідно за допомогою загального розв'язку задачі (6) побудувати рівняння відносно вектора довільних сталих \bar{b} . Загальний розв'язок не задовольняє цим умовам на ділянці границі $\Gamma: y = f(x), x \in [a, l]$. На цій ділянці вихідна задача має наступні граничні умови, що впливають з рівнянь рівноваги приграничної зони (рис. 2).

З рівнянь рівноваги диференціального приграничного елемента отримуємо співвідношення, яким повинні задовольняти невідомі функції:

$$\begin{aligned}
 k_x B(x) \tilde{u}(x, y) + \frac{df(x)}{dx} \sigma_x(x, y) + \tau_{xy}(x, y) &= k_x B(x) \Delta_x(x, y) + B(x) q_x(x, y), \\
 k_y B(x) \tilde{v}(x, y) + \frac{df(x)}{dx} \tau_{xy}(x, y) + \sigma_y(x, y) &= k_y B(x) \Delta_y(x, y) + B(x) q_y(x, y). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Тут k_x, k_y – жорсткості пружних стержнів, які моделюють кінематичну взаємодію з оточуючим середовищем, Δ_x, Δ_y – задані кінематичні впливи з боку зовнішнього середовища, q_x, q_y – силкові впливи з боку зовнішнього середовища,

$$B = \sqrt{1 + (df/dx)^2}.$$

Оскільки ця ділянка в загальному випадку не є прямою ортогональною до осі x , то побудувати редуковані граничні умови для цієї ділянки проекційним методом не можна.

Граничні умови (8) будемо розглядати в точках перетину прямих з граничною кривою Γ . Значення координат (x, y) на k -й прямій слід позначати (x_k, y_k) і ці координати мають зміст, перша координата x_k визначає проекцію точки k на відрізок прямої $(0, l)$, тобто координату відповідної точки ортогоналізації (вона ж точка видачі результатів), координата y_k вказує, на якій прямій знаходиться дана точка. Крім того, використання в якості базисних функцій «функцій-кришок» [9], значення яких в точці на прямій k дорівнює одиниці, а значення в точках інших прямих дорівнює нулю, дозволяє стверджувати, що k -й коефіцієнт в розкладі невідомої функції по такому базису:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\sim u^i(x) \cdot \varphi_i(y), \\ v(x, y) &\sim v^i(x) \cdot \varphi_i(y), \\ \sigma_x(x, y) &\sim \sigma_x^i(x) \cdot \varphi_i(y), \\ \tau_{xy}(x, y) &\sim \tau_{xy}^i(x) \cdot \varphi_i(y), \end{aligned} \quad (9)$$

має зміст значення цієї функції на відповідній прямій. Тому граничні умови (8) перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} k_x^* B(x_k) U^k(x_k) + \frac{df(x)}{dx} \sigma_x^k(x_k) + \tau_{xy}^k(x_k) &= k_x B(x_k) \Delta_x^k(x_k) + B(x_k) q_x^k(x_k), \\ k_y^* B(x_k) \tilde{V}^k(x_k) + \frac{df(x)}{dx} \tau_{xy}^k(x_k) + \sigma_y^k(x_k) &= k_y B(x_k) \Delta_y^k(x_k) + B(x_k) q_y^k(x_k). \end{aligned} \quad (10)$$

Оскільки в фундаментальній матриці $Z(x_k)$ переміщення U^k знаходяться в k -му рядку, V^k в $N+k$ рядку, σ_y^k в $2N+k$ рядку, τ_{xy}^k в $3N+k$ рядку і кожному фіксованому k відповідає в $Z(x_k)$ рядок з $2N$ елементів, а в векторі \bar{Z}_0 одна компонента, то підставивши в рівняння (8) загальний розв'язок (7) для кожного k отримуємо 2 рівняння. Однак

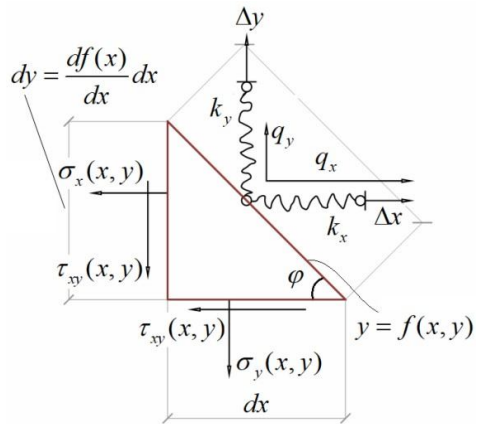


Рис. 2

рівняння для різних k несумісні, тому що відповідають різним значенням x_k , тобто різним точкам ортогоналізації, оскільки при ортогоналізації змінюється місцевий базис частинний розв'язків і, відповідно, змінюється \bar{b} .

В зв'язку з цим пропонується наступний алгоритм врахування граничних умов на ділянці $x \in [a, l]$. Для подальшого знаходження $\bar{b}(x_k)$ виділяється і обнуляється матриця AM (вимірності $2N \times 2N$), а для правої частини рівнянь – вектор \bar{Y}_0 вимірності $2N$. Після ортогоналізації в останній точці відрізка $[0, a]$ за допомогою граничних умов (10) знаходяться два перших рядки матриці AM і два перших елементи стовпчика \bar{Y}_0 . Далі виконується інтегрування до точки ортогоналізації. Після виконання ортогоналізації в наступній точці матриця AM та вектор \bar{Y}_0 піддаються лінійному перетворенню.

$$\begin{aligned} \overline{AM}_{k+1} &= \overline{AM}_k \cdot \Omega_{k+1}^{-1}, \\ \overline{Y}_{0,k+1} &= \overline{Y}_{0,k} + M_k \cdot \Omega_{0,k+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут Ω_k – матриця проєкцій, що формується при ортогоналізації частинних розв'язків однорідної задачі, $\overline{\Omega}_0$ – вектор проєкцій частинного розв'язку неоднорідних рівнянь. Після такого перетворення за допомогою граничних умов (10) на основі загального розв'язку (7) в точці $k+1$ формуються наступні два рядки матриці AM та два елемента вектора $\overline{Y}_{0,k+1}$.

Формування матриці AM та вектора \bar{Y}_0 продовжується таким чином до кінцевої точки. В результаті отримуємо квадратну матрицю AM вимірністю $2N \times 2N$ та $2N$ -вимірний вектор \bar{Y}_0 . Розв'язуючи рівняння

$$AM \cdot \bar{b} = \bar{Y}_0, \quad (12)$$

знаходимо вектор довільних сталих в кінцевій точці області визначення загального розв'язку редукованих рівнянь. Виконуючи стандартний зворотній хід алгоритму дискретної ортогоналізації Годунова та знаходячи значення невідомих в точках ортогоналізації отримуємо наближений розв'язок плоскої задачі теорії пружності для області D , з якої виділяємо розв'язок редукованої задачі, що задовольняє усім граничним умовам.

Слід зазначити, що для редукованих рівнянь граничні точки на границі кривої Γ проєктуються у внутрішні точки відрізка визначення редукованих рівнянь, тому така задача зветься багатоточковою задачею для системи диференціальних рівнянь.

Висновки. В даній роботі пропонується частинний варіант загального алгоритму розв'язування узагальненим методом прямих плоскої задачі пружності для областей неканонічної форми, якщо одна з торцевих границь є відрізком координатної лінії в декартовій системі координат. Розроблена методика дозволяє вдвічі зменшити трудомісткість розв'язання задач порівняно з загальним випадком.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Канторович А.В.* Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. // ДАН СССР 1934-с.21-34
2. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений. // Успехи математических наук.-1961.- Т.16 . -Вып 3.- С.171-174
3. *Слободянский М.Г.* Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. // “Прикладная математика и механика”.1939. Т.3. Вып.1 С. 75-82.
4. *Винокуров Л.П.* Решение пространственной задачи теории упругости в перемещениях. // Бюллетень харьковского инженерно-строительного института. 1940г. №18.
5. *Шкелев Л.Т. Мороков Ю.А. Романова Т.А. Станкевич А.Н.* Метод прямых и его использование при определении напряженного и деформированного состояния пластин и оболочек. // Киев. 2002. 177с.
6. *Корбач В.Г.* Алгоритм численного решения многоточечных краевых задач механики деформированного твердого тела. Прочность конструкций летательных аппаратов. / Сборник научных трудов / В.Г Корбач Редколлегия: Львов М.П. и др.- Харьков: Харьковский авиационный институт, 1990. - С.88-95.
7. *Станкевич А.М.* История и перспективы развития одного из методов решения многомерных задач строительной механики. // Вестник МГСУ. 2015г. №12 с.76-91
8. *Станкевич А. М.* Один вариант методу прямых в задачах динаміки товстих пластин / А. М. Станкевич, В. К. Чибіряков, Л. Т. Шкельов // Містобудування та територіальне планування. - 2010. - Вип. 38. - С. 399-407.
9. *Марчук Г.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. // Г.И. Марчук, В.И. Агошков М. Наука Главная редакция физико-математической литературы. 1981.- 416с.
10. *Чибіряков В.К. Станкевич А.М. Краснесва А.О.* Метод прямых у задачах стаціонарної теплопровідності для областей неканонічної форми // 2017 Київ КНУБА Містобудування та територіальне планування №63 С.462-474
11. *Чибіряков В.К. Станкевич А.М. Краснесва А.О. Шорін О.А.* Узагальнений метод прямых в задах теорії пружності для областей складної форми. // 2017 Одеса Вісник державної академії будівництва та архітектури №67 С.71.

REFERENCES

1. *Kantorovich A.V.* Ob odnom metode priblizhennogo reshenija differentsyalnyh uravnenij. (On a method of approximate solution of partial differential equations.)// DAN. SSSR 1934-s.21-34
2. *Godunov S.K.* O chislennom reshenii kraevykh zadach dlja linejnykh differentsyalnyh uravnenij. (On the numerical solution of boundary value problems for systems of linear differential equations.) // Uspehi matematicheskikh nauk.-1961.-T.16- Vyp 3- S. 171-174
3. *Slobodjanskij M.G.* Sposob priblizhennogo integrirovaniya uravneniy s chastnymi proizvodnymi i yego primeniye k zadacham teorii uprugosti. (The method of approximate integration of partial differential equations and its application to the problems of elasticity theory.) // “ Prikladnaya matematika i mekhanika ”.1939. T.3. Vyp.1 S. 75-82.
4. *Vinokurov L.P.* Resheniye prostranstvennoy zadachi teorii uprugosti v peremeshcheniyakh. (The solution of the spatial problem of the theory of elasticity in displacements.) // Byulleten' khar'kovskogo inzhenerno-stroitel'nogo instituta. 1940g. №18.
5. *Shkelev L.T. Morokov Y.A. Romanova T.A. Stankevich A.N.* Metod pryamykh i yego ispol'zovaniye pri opredelenii napryazhennogo i deformirovannogo sostoyaniya plastin i obolochek. (The method of lines and its use in determining the strained and deformed state of plates and shells.) // Kiyev. 2002. 177s.
6. *Korbach V.G.* Algoritm chislennogo resheniya mnogotochechnykh kraevykh zadach mekhaniki deformirovannogo tverdogo tela. Prochnost' konstruksiy letatel'nykh apparatov. (Algorithm for the numerical solution of multipoint boundary value problems for the mechanics of a deformed solid. Strength of aircraft structures.) // Sbornik nauchnykh trudov. V.G Korbach Redkollegiya: L'vov M.P. i dr.- Khar'kov: Khar'kovskiy aviatsionnyy institut, 1990.- S.88-95
7. *Stankevich A.M.* Istoriya i perspektivy razvitiya odnogo iz metodov resheniya mnogomernykh zadach stroitel'noy mekhaniki. (History and perspectives of development of one of the methods for solving multidimensional problems of structural mechanics.) // Vestnik MGSU. 2015g. №12-s.76-91

8. *Stankevych A.M.* Odyn variant metodu pryamykh v zadachakh dynamiky tovstykh plastyn (One variant of the method of direct in problems of dynamics of thick plates) / A.M. Stankevych, V.K. Chybiryakov, L.T. Shkel'ov // *Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya*. - 2010. - Vyp. 38. - S. 399-407.
9. *Marchuk G.I.* Vvedeniye v proyeksionno-setochnyye metody. (Introduction to projection-grid methods.) // G.I. Marchuk, V.I. Agoshkov M. Nauka Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury. 1981.- 416s
10. *Chybiryakov V.K. Stankevych A.M. Krasnyeyeva A.O.* Metod pryamykh u zadachakh statsionarnoy teploprovodnosti dlya oblastey nekanonichnoyi formy. (The method of lines in the problems of stationary heat conductivity for areas of non-canonical form.) // 2017 Kyiv KNUBA *Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya* №63 S.462-474
11. *Chybiryakov V.K. Stankevych A.M. Krasnyeyeva A.O. Shorin O.A.* Uzahalnenyy metod pryamykh v zadakh teorii pruzhnosti dlya oblastey skladnoyi formy. (A generalized method of lines in the problems of the theory of elasticity for regions of complex form.) // 2017 Odesa Visnyk derzhavnoyi akademiyi budivnytstva ta arkhitektury №67 S.71

Стаття надійшла 22.05.2018

Krasnyeyeva A.O.

ABOUT ONE ALGORITHM OF NUMERICAL AND ANALYTICAL SOLUTION OF PLANNED PROBLEMS OF THEORY OF ELASTICITY FOR AREAS OF NONCANONIC FORM

Well known, that both the heat conduction equation and the equation for calculating the stress-strain states of most models are determined in three-dimensional space and related to complex problems of mathematical physics. For the simplest cases, analytical methods of solution have been proposed, but most tasks, especially dynamic, analytical methods cannot be solved. In our time, numerical methods (mainly the method of finite elements) or combined numerical-analytical methods are used for practical solving of complex problems of thermal conductivity and elasticity theory. One of the oldest combined methods for solving such problems is the direct method proposed by Kantorovich in the 1930s.

The main idea of this method is the construction of multidimensional equations of mathematical physics by spatial coordinates up to one-dimensional. The problem in the spatial domain is continuous in one or two variables, and discrete by other variables.

The method of lines divides the solution into two stages. The first step is to reduce the dimensionality of the original problem and move to a system of ordinary differential equations, which is further called reduced. The finite difference method was used to reduce the dimensionality of the original equations in the traditional version of the direct method. In the second stage the analytical or approximate analytical methods were used to solve the resulting system, but numerical methods were not used. In the generalized version of the method of lines for reducing the dimensionality of the original equations the projection method is used, and the reduced equations are solved by modern numerical methods.

In our works [10] [11] a general algorithm for solving flat problems of the theory of thermal conductivity and elasticity theory for non-canonical forms based on the generalized method of lines is proposed.

This paper is devoted to the construction of an effective algorithm for solving a plane problem of elasticity theory for regions of a definite form (a rectangle cut from one of the sides by some curve Γ) based on a generalized method of lines.

Key words: method of line, domain of noncanonical form, projection method, reduced equations.

Краснеева А.А.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО-АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТИ НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Даная работа посвящена построению эффективного алгоритма для решения плоской задачи теории упругости для областей определенной формы (прямоугольник, который с одной из сторон обрезан некоторой кривой Γ) на основе метода прямых.

Ключевые слова: метод прямых, область неканонической формы, проекционный метод, редуцированные уравнения.

УДК 539.3

Краснеєва А.О. Про один алгоритм чисельно-аналітичного розв'язування плоских задач теорії пружності для областей неканонічної форми // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 155-163.

Робота присвячена побудові ефективного алгоритму для розв'язку плоскої задачі теорії пружності для областей певної форми на основі методу прямих.

Табл. 0. Іл. 2. Бібліогр. 11 назв.

Krasnyeyeva A.O. About one algorithm of numerical and analytical solution of plane problems of theory of elasticity for areas of nonkanonic form // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 155-163. – Ukr.

The paper is devoted to the construction of an effective algorithm for the solution of the plane elasticity problem for regions of a certain shape on the basis of the method of lines.

Tables 0. Fig. 2. Ref. 11.

Краснеєва А.А. Об одном алгоритме численно-аналитического решения плоских задач теории упругости для областей неканонической формы // Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборник. – К.: КНУСА, 2018. - Вып. 100. - С. 155-163.

Робота посвящена построению эффективного алгоритма для решения плоской задачи теории упругости для областей определенной формы на основе метода прямых.

Табл. 0. Ил. 2. Библиогр. 11 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): Асистент Краснеєва Анна Олександрівна

Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр-т 31, КНУБА (Київський національний університет будівництва і архітектури) Краснеєва Анна Олександрівна.

Робочий тел.: +38(044)2415559

Мобільний тел.: +38(066)2023996

E-mail: krasnyeyeva@gmail.com

UDC 539.3:004.94: 624.074

SOME ASPECTS OF MODELLING NONLINEAR BEHAVIOUR OF REINFORCED CONCRETE

M. Barabash^{1,2},

Doctor of Technical Sciences, Senior Research Officer,
Professor of Computers Technologies Department

¹LIRA SAPR Ltd,

7a, Kiyanovsky side street (provulok), Kyiv, 04053, Ukraine

²National Aviation University,

1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kyiv, Ukraine

Abstract. The paper deals with some aspects of modelling the structures' behaviour: the 'engineering nonlinearity' method; determining stresses on the basis of nonlinear dependences 'stress-strain'. The 'engineering nonlinearity' method enables you to indirectly consider physical nonlinearity while computing by the standard method. The 'engineering nonlinearity' method enables you to consider physically nonlinear behavior of reinforced concrete section by iteration and step-type method. The method makes it possible to determine the stiffness parameters of the section. These parameters may be reduced because of the crack propagation, plastic strain in concrete and reinforcement. Concept of the method is described. Suggested method 'engineering nonlinearity' enables the user to consider stiffness distribution more accurately. This method is almost similar to standard methods of linear analysis, that is, it is possible to carry out analysis on all types of loads, compose DCF and DCL, analyse reinforcement. Comparison study for peculiar features of 'Engineering nonlinearity' method is performed. Analysis results for the test problem (based on engineering nonlinearity) are provided. Analysis results for the test problem shows some redistribution of forces and convergence of results obtained in 'engineering nonlinearity' method and in analysis with account of physical nonlinearity. This approach makes it possible to use the 'engineering nonlinearity' method for computing and modelling the erection process, analysis of panel buildings (platform joints), etc. The 'Cross-section Design Toolkit' module supports nonlinear analysis for a certain set of forces. The proposed methods for modelling and analysis of structures with account of their life cycle enable us to find out dangerous tendencies at the design, erection and further maintenance stage of the structure and to prevent the possible destruction both for separate structural elements and the object as a whole.

Keywords: physical nonlinearity, engineering nonlinearity, life cycle, design model, computer modelling

Introduction. New methods of mathematical physics (for solving problems of dynamics, stability, physical and geometric nonlinearity) were developed due to unlimited capabilities for computer models on the basis of FEM. For example, solving physically nonlinear problems within the limits of the active load (regardless of a number of simplified hypotheses) provides the engineer with much more information for estimating the stress-strain state compared with design models based on elastic-linear assumptions.

We can suppose that the independent role of design models in linearly elastic statement will subsequently be rapidly decreasing and they will be given an auxiliary role to solve nonlinear problems on the basis of linearization methods.

A great contribution to the general theory of numerical analysis methods, including the creation and development of finite element method, methods of nonlinear analysis of structure was made by V.A. Bazhenov [1, 3], Yu.V. Veryuzhsky, A.S. Gorodetsky, V.I. Gulyaev, V.N. Kislooky [2], A.V. Perelmuter, A.S. Sakharov [2], V.I. Slivker, V.K. Tsykhanovsky and others.

Many works have been devoted to the methods of solving nonlinear problems in structural mechanics [1-3, 5].

To approximate design models generated at the design stage to the actual conditions of their maintenance, it is necessary to consider the change in the stress-strain state at each stage of the life cycle of the building object [6]. Development of methods of computer modelling is of high importance. These methods are directed to maximize the use of load-bearing capacity of structures while reducing the material consumption and ensuring structural safety.

Along with the standard approaches for determining the stress-strain state of the structure (fixed load – design model – stress-strain state), the modelling of structures' behaviour becomes more important. Behaviour of structures is examined in various situations with account of various features and factors.

Let us consider some aspects of modelling behaviour of structures.

1. Concept of the method 'engineering nonlinearity'. The method makes it possible to determine the stiffness parameters of the section. These parameters may be reduced because of the crack propagation, plastic strain in concrete and reinforcement. Creep, cracks and other specific features of reinforced concrete cause a change in the stiffness parameters of elements at the early stages of loading, including the maintenance stage. This causes redistribution of forces, significant increase in displacements compared with linearly elastic analysis. Account of these factors is regulated by normative documents. Thus, in the normative documentation of some countries it is pointed out that in practical calculations it is possible to take into account lowered stiffness values – for tensioned elements, use a reduction factor of 0.3, for compressed ones - 0.6. However, in reality there are no elements only bent or compressed. As a rule, the elements are eccentrically compressed or eccentrically tensioned. In [4] it is suggested to take into account the reduced stiffness by the method of integral moduli of elasticity. The method introduces single modulus of elasticity for the whole section. Bondarenko indicates that normal stresses vary along the height of the element. Nonlinearity of the strain of material predetermines the difference in the moduli of elasticity at points with different stresses.

These features of behaviour of reinforced concrete are taken into account more precisely by the step-type method [5]. Analysis of structure with account of physical nonlinearity (that is regulated by normative documents in the strict mathematical sense of this process when used in general engineering calculations) has a number of factors that are not acceptable in the case of general calculations of complex structural systems:

- such analysis may be carried out only for one load and it cannot be used in DCF or DCL;
- defining input data is time-consuming process;
- excessive resources due to multiple solution of linearized equations, it causes considerable increase in analysis time for complex structural systems.

These factors cause creation and development of the 'Engineering Nonlinearity' method. On the one hand, this method indirectly takes into account the reduced stiffness due to physical nonlinearity; on the other hand, it allows the engineer to use the standard analysis method [5, 6, 7].

The concept of the method is as follows.

Analysis of structures with account of engineering nonlinearity allows us to determine how the forces are redistributed in the elements, how displacements are increased and many other features of the structure's behavior that cannot be determined with linear elastic calculation. In fact, the 'Engineering nonlinearity' method makes it possible to differentially reduce the stiffness parameters of sections of reinforced concrete elements [7, 8, 9].

In LIRA-SAPR 2018, two variants of the 'Engineering nonlinearity' method have been developed. In the first variant ('Engineering nonlinearity 1'), it is proposed to define reduced stiffnesses on the basis of the iterative method of analysis with the selection of reinforcement during this process. In the second variant ('Engineering nonlinearity 2'), reduced stiffness is determined by the step-type method with further defining of reinforcement. On the one hand, the 'Engineering nonlinearity 2' method allows you to take into account the physically nonlinear behaviour of the reinforced concrete section, on the other hand - to carry out analysis according to the standard procedure with account of DCF and DCL.

Analysis by 'Engineering Nonlinearity' method consists of two main stages. At the first stage, the static analysis of structure is carried out in characteristic load case (or combination of loads) that, by engineer's opinion, will have a significant effect on the stiffness of structure: crack development, plastic strain in concrete [7]. At the second stage, based on the analysis results, the stiffness values are modified according to the stress-strain state of each section and the standard analysis is carried out for the structure in which the elements have stiffness parameters determined at the first stage. Standard analysis includes linear-elastic analysis for the entire set of loads (dead weight, live load, earthquake, etc.), composing of DCF or DCL, analysis for sections of RC and steel elements, and design.

2. Stiffness parameters of bar section. Arbitrary section of bar is presented in Figure 1. Two moments M_x and M_y , as well as axial force N act on the section. Moments act relative to principal axes of the section x and y . Axial force is applied at the point C – intersection between geometric axis of the bar and plane of the section. It is necessary to determine stiffness parameters of the section that correspond to secant moduli of elasticity of concrete and reinforcement.

To determine the stress-strain state, it is necessary to find out location of the neutral axis. This location is described with two values y_c , β and the curvature of the section ξ (see Fig.1): y_c – displacement of the neutral axis; β – rotation angle of the neutral axis; ξ – curvature of the section.

The problem is solved by numerical method. In iteration process three unknowns y_c , β , ξ , are determined; they are computed from three equations of equilibrium:

$$\sum z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0,$$

$$\sum z = \sum_{j=1}^n \Delta F_{j\bar{\sigma}} \cdot \sigma_{j\bar{\sigma}}(y_c, \beta, \xi) + \sum_{i=1}^m f_{i\bar{\sigma}} \sigma_{i\bar{\sigma}}(y_c, \beta, \xi) + N = 0,$$

$$\sum M_x = \sum_{j=1}^n \Delta F_{j\bar{\sigma}} \cdot \sigma_{j\bar{\sigma}}(y_c, \beta, \xi) y_j(y_c, \beta, \xi) + \sum_{i=1}^m f_{i\bar{\sigma}} \sigma_{i\bar{\sigma}}(y_c, \beta, \xi) y_{i\bar{\sigma}}(y_c, \beta, \xi) + M_x + N e_x = 0,$$

$$\sum M_y = \sum_{j=1}^n \Delta F_{j\bar{\sigma}} \cdot \sigma_{j\bar{\sigma}}(y_c, \beta, \xi) \cdot x_j(y_c, \beta, \xi) + \sum_{i=1}^m f_{ia} \sigma_{ia}(y_c, \beta, \xi) \cdot x_{ia}(y_c, \beta, \xi) + M_y + N e_y = 0.$$

Stiffness parameters $E_{o\bar{\sigma}}F$, $E_{o\bar{\sigma}}I_x$, $E_{o\bar{\sigma}}I_y$ are determined according to diagrams σ – ε for concrete and reinforcement. For concrete, only compressed part of concrete is considered with secant modulus of elasticity that is variable along the section. For every rebar, appropriate modulus of elasticity is used

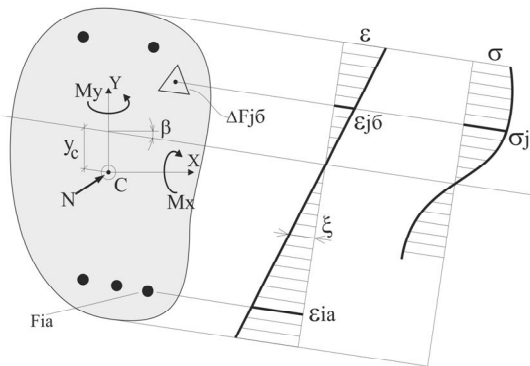


Fig. 1. Stress-strain state of the bar section

$$E_{o\bar{\sigma}}F = \sum_{j=1}^n E_{cekj\bar{\sigma}} \Delta F_{j\bar{\sigma}} + \sum_{i=1}^m E_{cekia} f_{ia},$$

$$E_{o\bar{\sigma}}I_x = \sum_{j=1}^n E_{cekj\bar{\sigma}} \Delta F_{j\bar{\sigma}} y_{j\bar{\sigma}}^2 + \sum_{i=1}^m E_{cekia} f_{ia} y_{ia}^2,$$

$$E_{o\bar{\sigma}}I_y = \sum_{j=1}^n E_{cekj\bar{\sigma}} \Delta F_{j\bar{\sigma}} x_{j\bar{\sigma}}^2 + \sum_{i=1}^m E_{cekia} f_{ia} x_{ia}^2.$$

Here $\Delta F_{j\bar{\sigma}}$, f_{ia} – elementary zones to which section of concrete and areas of separate rebars are divided, n – number of zones in concrete, m – number of rebars, $E_{cekj\bar{\sigma}}$, E_{cekia} – secant moduli of elasticity for concrete and reinforcement, they are determined according to diagrams σ – ε (see Fig. 1), $x_{j\bar{\sigma}}$, $y_{j\bar{\sigma}}$, x_{ia} , y_{ia} – distance from the gravity centre of the j -th zone of concrete and the i -th zone of rebar up to principal axes; location of principal axes (y_c , β) is determined during iteration analysis.

For concrete, only compressed part of concrete is considered with secant modulus of elasticity that is variable along the section. For every rebar, appropriate modulus of elasticity is used.

Stiffness matrix for the bar that has secant stiffness parameters variable along the length is also generated by numerical method (every bar is considered as a super-element).

This approach makes it possible to use the ‘Engineering nonlinearity 2’ method for analysis and modelling the erection process, analysis of panel buildings (platform joints), etc. In modelling the erection process, it is possible to specify characteristic load cases at stages. In a certain sense, ‘engineering nonlinearity 2’ transfers ideas of modelling the loading history (step-type method) to the analysis according to the standard type with account of physical nonlinearity.

Table 1 compares the features of the method for both variants.

Table 1

Comparison study for peculiar features of 'Engineering nonlinearity' method

Parameters	Engineering nonlinearity	Engineering nonlinearity 2
Characteristic load case	Arbitrary load cases are included according to the views of users as to their characteristic influence on the change (reduction) in stiffness of the element	Only long-term loads are included, further they will be included in the DCF and DCL
Methods for determining of reduced stiffness	Iteration	Step-type
Reinforcement	Determined during iteration analysis on characteristic load	Defined
Computing forces (analysis by standard type)	Analysis is carried out for all load cases according to secant moduli with further composing DCF, DCL	Analysis is carried out only on temporary load cases according to tangent moduli that correspond to the last step of the step-type analysis on characteristic load case. Results of this analysis as well as analysis results on characteristic load case are included into DCF and DCL
Account of physical nonlinearity during erection	Not available	Available
Account of nonlinear behaviour of platform joints (large panel buildings)	Not available	Available

3. Test example

Below there are analysis results for the test problem on the basis of engineering nonlinearity (Fig. 2). The load is $q = 8 \text{ t/m}$ is accepted as the 'characteristic load case', temporary load is assumed to be 2 t/m . Table 2 shows the analysis results for the frame with account of differentiated distribution of stiffnesses by different methods.

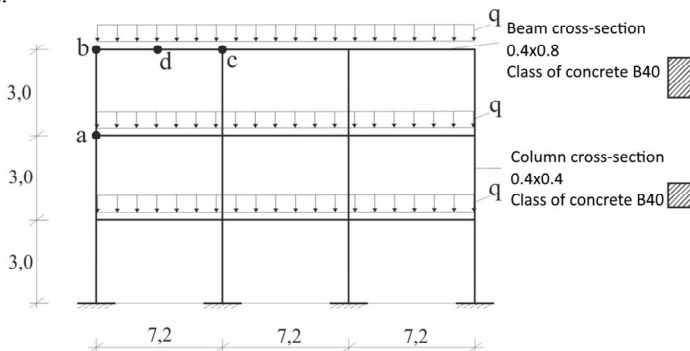


Fig. 2. Design model of the structure

Table 2

Analysis results of test example

Values for parameters of stress-strain state Type of analysis	Static analysis			Dynamic analysis	
	Moment in girder 'b-c' at node 'b', <i>tm</i>	Moment in girder 'b-' at node 'd', <i>tm</i>	Displacement at node 'd', <i>tm</i>	Frequency ω , Hz	Period <i>T</i> , sec
Linear-elastic analysis with initial stiffnesses	-15.5	34	-3.95	1.56	0.64
Linear-elastic analysis with stiffnesses that are recommended in SP 52-103-2007	-20.9	30.8	-9.39	1.09	0.91
Linear-elastic analysis with stiffnesses obtained in the mode 'Engineering Nonlinearity 1'	-15,7	33,7	-5,02	1.65	0,61
Nonlinear analysis with stiffnesses in the mode 'Engineering Nonlinearity 2'	-16,5	32,9	-5,99	1,32	0,76
Physical nonlinearity	-16,5	32,9	-6,07		

Conclusions: By analysis results, we can draw the following conclusions:

- there is no significant redistribution of forces, it is explained by a small working load, though there is a tendency to redistribution - the smaller moment at node b increases, and the larger one at node d decreases;

- account of physical nonlinearity on displacements is more significant. It is possible to take the analysis by the step-type method (the 'physical nonlinearity' line) as the standard here.

Displacements at node *d* are increased 1.5 times in comparison with linear analysis. The 'Engineering nonlinearity' method shows approximately the same result (difference of 1.3%).

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A. Gulyar O.I., Kozak O.L., Rutkovskyy V.A. Sakharov O.S.* Numerical modeling of concrete structures destruction by the finite element method // Kiev: Naukova dumka, 1996. – 360 p.
2. *Saharov A.S., Kislookij V.N., Kirichevskij V.V.* The finite elements method into mechanics of rigid bodies [The finite elements method into mechanics of rigid bodies]. Kiev: Vishha shk., 1982. – 480 p.
3. *Bazhenov V.A., Semenuk M.P., Trach V.M.* Neliniyne deformuvannya, stiykist' i zakritichna povedinka anizotropnih obolonok [Nonlinear deformation, stability and overcritical behavior of anisotropic shells]: Monographya. – K.: Karavella. - 2010. – 352 p.
4. *Bondarenko V.M., Bondarenko S.V.* Inzhenernye metody nelinejnoj teorii zhelezobetona [Engineering methods of nonlinear theory of reinforced concrete]. Moscow: Stroyizdat publ., 1982 – 287 p.
5. *Gorodetsky A.S.* Raschet konstrukcij na JeCVM s uchetom uprugo- plasticheskikh deformacij [Analysis of structures on electronic digital computers (ETSVM) with account of elasto-plastic strain] // Proceedings from Report at the III National conference on application of ESTVM in building mechanics. Leningrad: Lenstroyizdat, 1967.
6. *Barabash M.S.* Komp'juternoe modelirovanie processov zhiznennogo cikla ob'ektov stroitel'stva [Computer modelling of life cycle process for the building objects]. Kiev: Stal' publ., 2014 – 301 p.

7. *Barabash M.S.* Chislennoe modelirovanie NDS konstrukcij s uchetoм stadij zhiznennogo cikla zdaniј i sooruzhenij [Numerical modelling of the stress-strain state of structures with account of life cycle stages for buildings] // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2015.– v ol. 11, Issue 1. – P.80-90
8. *Gorodetsky A.S., Barabash M.S., Sidorov V.N.* Komp'juternoe modelirovanie processa vozvedeniја stroitel'nyh konstrukcij [Computer modelling in problems of building mechanics]. Moscow: ASV publ., 2016 - 338 p.
9. *Gorodecky A.S., Barabash M.S.* Uchet nelinejnoj raboty zhelezobetona v PK LIRA-SAPR. Metod «Inzhenernaja nelinejnost'» [Account of nonlinear behaviour of reinforced concrete in LIRA-SAPR. Method 'Engineering Nonlinearity'] // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2016.–Vol. 12, Issue 2. –P. 92-98

Стаття надійшла 24.05.2018

УДК 539.3:004.94: 624.074

Барабаш М.С.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ РОБОТИ ЗАЛІЗОБЕТОНУ

У статті розглядаються деякі аспекти моделювання нелінійної роботи залізобетонних конструкцій, а саме метод «Інженерна нелінійність». Метод «Інженерна нелінійність» дозволяє розглядати фізично нелінійну поведінку залізобетонного перерізу ітераційним і кроковим методом. Метод дозволяє визначити параметри зниженою жорсткості перерізу, яка виникає через утворення тріщин, пластичні деформації в бетоні та арматурі. Описана концепція методу. Запропонований метод «Інженерна нелінійність» дозволяє інженеру більш точно оцінювати розподіл жорсткості. Цей метод майже аналогічний стандартним методам лінійного аналізу, а саме дозволяє проводити аналіз за всіма типами навантажень, складати розрахункові сполучення зкіль та розрахункові сполучення навантажень, аналізувати зусилля. Представлені результати аналізу тестової задачі, які показують певний перерозподіл сил і збіжність результатів, отриманих методом «Інженерна нелінійність» і з урахуванням фізичної нелінійності. Метод «Інженерна нелінійність» можливо використовувати для обчислення і моделювання процесу зведення, аналізу платформних стиків панельних будинків і таке інше.

Ключові слова: фізична нелінійність, інженерна нелінійність, життєвий цикл, модель проектування, комп'ютерне моделювання.

УДК 539.3:004.94: 624.074

Барабаш М.С.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ РАБОТЫ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

В статье рассматриваются некоторые аспекты моделирования нелинейной работы железобетонных конструкций, а именно метод «Инженерная нелинейность». Метод «Инженерная нелинейность» позволяет рассматривать физически нелинейное поведение железобетонного сечения итерационным и шаговым методом. Метод позволяет определить параметры пониженной жесткости сечения, которая возникает из-за трещинообразования, пластической деформации в бетоне и арматуре. Описана концепция метода. Предлагаемый метод «инженерная нелинейность» позволяет инженеру более точно оценивать распределение жесткости. Этот метод почти аналогичен стандартным методам линейного анализа, т. е. позволяет проводить анализ по всем типам нагрузок, составлять РСУ и РСН, анализировать усилия. Представлены результаты анализа тестовой задачи (основанной на инженерной нелинейности), которые показывают некоторое перераспределение сил и сходимости результатов, полученных методом «Инженерная нелинейность» и с учетом физической нелинейности. Метод «Инженерная нелинейность» возможно использовать для вычисления и моделирования процесса возведения, анализа платформенных стыков панельных зданий и т.д.

Ключевые слова: физическая нелинейность, инженерная нелинейность, жизненный цикл, модель проектирования, компьютерное моделирование.

УДК 539.3:004.94: 624.074

Барабаш М.С. Деякі аспекти моделювання нелінійної роботи залізобетону // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 164-171.

Представлено нові дослідження, пов'язані з виконанням розрахунків з урахуванням реальних властивостей матеріалу. Більшою мірою це стосується залізобетону, який вже при експлуатаційних навантаженнях в зв'язку з розвитком тріщин і пластичних деформацій бетону обумовлює значне зниження жорсткостей елементів і збільшення переміщень у порівнянні з розрахунком в лінійній постановці.

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. 9 назв.

Barabash M. Some aspects of modelling nonlinear behaviour of reinforced concrete // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 164-171.

New researches connected with execution of calculations taking into account real properties of a material are presented. To a greater extent, this relates to reinforced concrete, which already at operational loads due to the development of cracks and plastic deformations of concrete causes a significant reduction in the stiffness of the elements and increase displacement compared with the calculation in linear formulation.

Tables 2. Fig. 2. Ref. 9.

Барабаш М.С. Некоторые аспекты моделирования нелинейной работы железобетона // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборник. – К.: КНУСА, 2018. - Вип. 100. - С. 164-171.

Представлены новые исследования, связанные с выполнением расчетов с учетом реальных свойств материала. В большей степени это касается железобетона, который уже при эксплуатационных нагрузках в связи с развитием трещин и пластических деформаций бетона обуславливает значительное снижение жесткостей элементов и увеличение перемещений по сравнению с расчетом в линейной постановке.

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. 8 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, доцент, старший науковий співробітник, професор кафедри комп'ютерних технологій будівництва Навчально-наукового інституту аеропортів НАУ БАРАБАШ Марія Сергіївна.

Адреса робоча: 03058, Україна, м. Київ, просп. Космонавта Комарова 1, Національний авіаційний університет, Навчально-науковий інститут аеропортів. БАРАБАШ Марія Сергіївна

Робочий тел.: +38(044) 406-74-24.

Мобільний тел.: +38(095) 286-39-90.

E-mail: bmari@ukr.net

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2157-521X>

УДК 539.3

ТЕСТУВАННЯ ЗБІЖНОСТІ МСЕ НА ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ПРИ ВИКОРИСТАННІ ПРОСТОРОВОГО КРИВОЛІНІЙНОГО СЕ

Г.М. Іванченко ,
д-р техн. наук, професор

А.В. Пікуль

*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Київ, Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

В даній роботі наведено результати тестування методу скінченних елементів з використанням криволінійного просторового скінченного елемента на двох типах задач теорії пружності (рівновага товстостінного циліндра під дією зовнішнього та внутрішнього тиску, рівновага товстих плит з різними умовами закріплення) з різними параметрами та згущенням сітки дискретизації. Результати дослідження порівнюються з відомими аналітичними розв'язками, а також з розв'язками, отриманими іншими схемами методу скінченних елементів в ПК «ЛПРА-САПР» та ПК «SCAD Office».

Ключові слова: метод скінченних елементів, товсті пластини, товсті оболонки, криволінійний просторовий скінченний елемент, задача Ламе.

Вступ. Побудова співвідношень на основі гіпотез Кірхгофа-Лява не дає можливості врахувати перепади функції напруження по товщині пластини, що приводить до великої похибки при розрахунку конструкцій з концентраторами напружень. Дещо ліпші результати дозволяє отримати застосування елементів, побудованих на основі теорії Міндліна-Рейснера, яка враховує деформації поперечного зсуву.

Використання просторових криволінійних скінченних елементів при моделюванні та розрахунку нетонких пластин і оболонок дозволяє правильніше оцінити напружено-деформований стан конструкцій, що проєктуються.

Збіжність методу скінченних елементів це важлива характеристика, оскільки визначає придатність скінченного елемента до моделювання конструкцій. Оскільки апроксимація, як правило, дає наближений опис розподілу деформацій в елементі, то результати розрахунку конструкції в загальному випадку також є наближеними. І тому залишається актуальним питання щодо точності, стійкості і збіжності розв'язку, отриманого методом скінченних елементів.

В даній роботі розглядається тестування методу скінченних елементів на просторових задачах теорії пружності, змодельованих за допомогою криволінійного скінченного елемента, реалізованого в межах дисертаційного дослідження [1, 5] і впровадженого в розрахунковий процесор ПК «ЛПРА-САПР» під номером 39, та порівняння результатів розрахунку з теоретичними розв'язками, які містяться в працях А.І. Лур'є [4], Л.Г. Доннелла [2], Б.М. Лісіцина [3] та ін. В якості тестових розглядаються: задача Ламе про товстий циліндр під зовнішнім та

внутрішнім тиском, товста сфера під зовнішнім та внутрішнім тиском, згин товстих пластин з різними умовами обпирання.

З принципу можливих переміщень

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{l}(\mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

де дійсне переміщення \mathbf{u} та можливе переміщення \mathbf{v} визначені на області Ω і належать енергетичному простору V , впливає умова збіжності:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \|U - U_d\|_V \rightarrow 0, \quad (2)$$

де U – точний розв’язок, U_d – розв’язок, отриманий МСЕ, d – крок розбивки скінченними елементами.

Оцінка похибки за метричним критерієм:

$$\|U - U_d\|_0 \leq kd^2 \|U\|_2. \quad (3)$$

1. Товстостінний циліндр під зовнішнім та внутрішнім тиском.

Розглянемо задачу рівноваги товстостінного циліндра під рівномірним зовнішнім та внутрішнім тиском (задача Ламе), що розташований поміж двома нерухомими жорсткими гладкими плитами, які не дозволяють поздовжні переміщення на торцях циліндра, але не заважають радіальним зміщенням. Виведення аналітичного розв’язку задачі в переміщеннях та в напруженнях наведено в праці Лур’є [4].

Для порівняння моделюємо товстостінний циліндр з зовнішнім радіусом 10 см в ПК «ЛІРА-САПР» за допомогою просторового криволінійного СЕ (39 СЕ) та за допомогою ізопараметричного 36 СЕ (рис. 1). Циліндр розбиваємо по периметру на 12 секторів та по радіусу на 1 і 2 елементи для товщин 1-9 см, і на 4 елементи для товщин 7-9 см. У вузлах задаємо локальну систему координат, орієнтовану відцентрово. Граничні умови – в’язі по всіх локальних степенях свободи окрім радіальних. Модуль пружності матеріалу $E = 200$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.25$. Навантаження – зовнішній тиск 100 кПа та внутрішній 500 кПа.

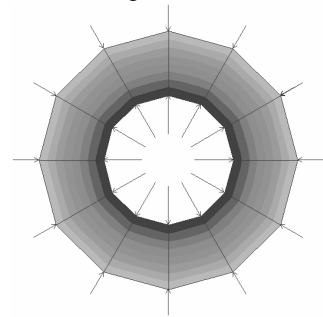


Рис. 1

Результати розрахунку наведені в таблицях: радіальне переміщення внутрішньої поверхні циліндра наведено в Табл.1-3, та радіальне переміщення зовнішньої поверхні в Табл. 4-6 при розбивці по товщині в 1, 2, та 4 елементи відповідно.

Таблиця 1

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	0,2225	0,1043	-53,13	-0,0704	-131,6
0,08	2,546	0,4687	0,4210	-10,17	0,2973	-36,58
0,07	2,056	0,7675	0,7386	-3,77	0,5803	-24,39
0,06	1,637	1,1607	1,1541	-0,53	0,9883	-14,86
0,05	1,273	1,7187	1,7396	1,22	1,580	-8,07
0,04	0,955	2,5781	2,6260	1,86	2,497	-3,15
0,03	0,674	4,0533	4,1391	2,12	4,049	-0,11
0,02	0,424	7,0833	7,2380	2,18	7,203	1,69
0,01	0,201	16,3570	16,707	2,14	16,780	2,59

Таблиця 2

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	0,2225	0,1925	-13,50	0,1353	-39,20
0,08	2,546	0,4687	0,4548	-2,98	0,3707	-20,92
0,07	2,056	0,7675	0,7721	0,60	0,6877	-10,40
0,06	1,637	1,1607	1,1840	2,01	1,109	-4,46
0,05	1,273	1,7187	1,7610	2,46	1,699	-1,15
0,04	0,955	2,5781	2,6420	2,48	2,597	0,73
0,03	0,674	4,0533	4,1504	2,40	4,126	1,79
0,02	0,424	7,0833	7,2440	2,27	7,254	2,41
0,01	0,201	16,3570	16,710	2,16	16,808	2,76

Таблиця 3

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	0,2225	0,21412	-3,78	0,16987	-23,67
0,08	2,546	0,4687	0,47845	-2,07	0,43158	-7,93
0,07	2,056	0,7675	0,79267	3,28	0,74984	-2,30

Таблиця 4

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	-0,2746	-0,2508	-8,67	-0,2804	2,10
0,08	2,546	-0,1562	-0,1447	-7,39	-0,2023	29,47
0,07	2,056	0,0584	0,0641	9,87	-0,006	-110,23
0,06	1,637	0,4018	0,4066	1,21	0,3296	-17,95
0,05	1,273	0,9375	0,9499	1,32	0,874	-6,77
0,04	0,955	1,7969	1,8240	1,51	1,759	-2,11
0,03	0,674	3,2904	3,3489	1,78	3,308	0,53
0,02	0,424	6,3542	6,4795	1,97	6,481	2,00
0,01	0,201	15,674	15,997	2,06	16,10	2,72

Таблиця 5

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	-0,2746	-0,2779	1,19	-0,2973	8,26
0,08	2,546	-0,1562	-0,1621	3,72	-0,1875	20,00
0,07	2,056	0,0584	0,0531	-8,97	-0,0262	-55,12
0,06	1,637	0,4018	0,4019	0,05	0,378	5,92
0,05	1,273	0,9375	0,9487	1,19	0,9311	-0,68
0,04	0,955	1,7969	1,827	1,68	1,819	1,23
0,03	0,674	3,2904	3,353	1,90	3,362	2,17
0,02	0,424	6,3542	6,4827	2,02	6,522	2,64
0,01	0,201	15,674	15,999	2,07	16,12	2,84

Таблиця 6

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	-0,2746	-0,2860	4,16	-0,2938	6,99
0,08	2,546	-0,1562	-0,1671	6,93	-0,1754	12,26
0,07	2,056	0,05838	0,0509	-12,80	-0,0449	-23,10

В процесі дослідження виявлено, що найзручніше порівнювати залежність розміру похибки в обчисленні переміщень у залежності від

відношення товщини циліндра до довжини серединної дуги сектора. По результатах розрахунку побудовано графіки залежності для модулів похибок отриманих при переміщенні внутрішньої поверхні (рис. 2) та зовнішньої поверхні (рис. 3).

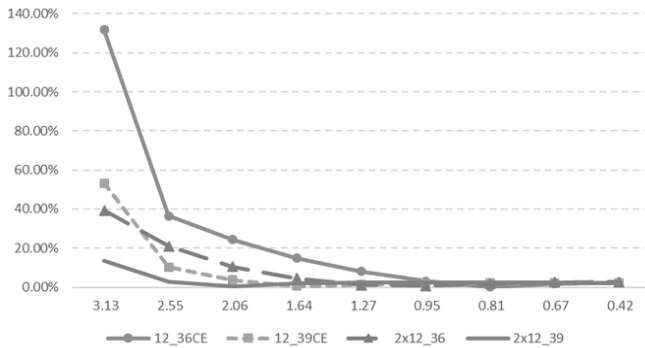


Рис. 2

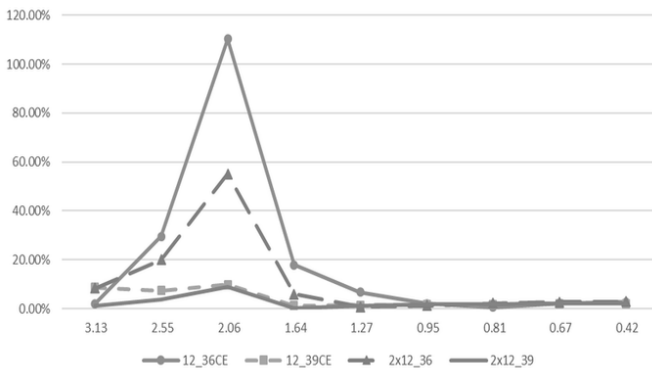


Рис. 3

Для моделей з товщиною стінки 7-9 см виконуємо розбивку в 4 елементи по товщині, щоб перевірити чи уточнюється розв'язок при згущенні сітки в 2 та 4 рази.

Таблиця 7

h	Внутрішня поверхня			Зовнішня поверхня		
	$\delta_1, \%$	$\delta_2, \%$	$\delta_4, \%$	$\delta_1, \%$	$\delta_2, \%$	$\delta_4, \%$
0.09	53.13	-13.50	-3.78	-8.67	1,19	4,16
0.08	-10.17	-2.98	2.07	-7,39	3,72	6,93
0.07	-3.77	0.60	3.28	9,87	-8,97	-12,80

Для товщини 9 см видно, що при згущенні сітки по товщині в 2 рази на переміщеннях внутрішньої поверхні уточнення розв'язку відбувається майже в 4 і вдруге в 3.5 рази, що добре відповідає нерівності (3). Для товщин 7 та 8 см згущення сітки перший раз уточнює розв'язок, а друге згущення вже ні. Такий результат можна пояснити впливом округлень у програмному забезпеченні або збіжністю до результату дещо відмінного

від отриманого аналітично. Для більшості задач похибкою в межах 3% можна знехтувати. Однак, потрібно проводити додаткові дослідження на інших задачах. Пікове значення похибки при товщині 7 см для переміщень зовнішньої поверхні пояснюється малістю відповідного аналітичного значення переміщення.

З результатів розрахунку можна зробити висновок, про межі застосування 39 СЕ – при розбивці в 1 елемент по товщині задовільний результат отриманий при співвідношенні товщини елемента до довжини серединної дуги від 0.2 до 2.

2. Товста шарнірно оперта плита. Розглянемо задачу про товсту квадратну шарнірно-оперту плиту під дією поперечного рівномірно

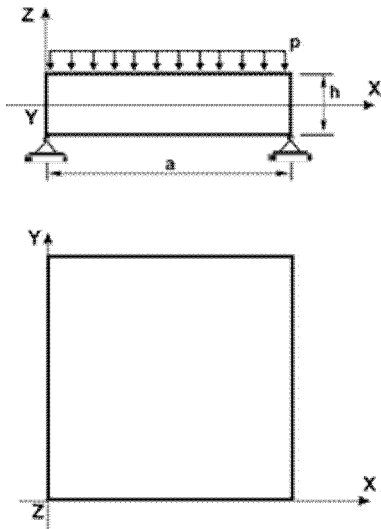


Рис. 4

розподіленого навантаження (рис. 4), розв'язок якої наведений у роботах [2, 7]. В дослідженні розглядаються три розрахункові моделі плит, зі співвідношенням довжини прольоту до товщини a/h – 8, 4 та 2. Розмір прольоту $a = 16$ м, інтенсивність поперечного навантаження $p = 100$ кПа, модуль пружності $E = 30$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.2$. Розбивку виконуємо за допомогою 39 СЕ. З сіткою в плані 4x4, 8x8, 16x16, 32x32 та 64x64. Порівнюватимемо з аналітичним максимальне значення вертикального переміщення серединної лінії плити.

Результати розрахунку при дискретизації кроком 0.5 м (сітка 32x32) зібрано до Табл. 8. для моделі виконаної 39 СЕ, 36 СЕ (ПК «ЛІРА-САПР») та 144 СЕ (побудований на основі теорії Міндліна-Рейснера, ПК «SCAD Office»). Можемо побачити, що для тонших пластин прогини отримані при моделюванні 39 СЕ обчислені точніше ніж за допомогою 36 СЕ та 144 СЕ. Для плити товщиною 8 м значення прогинів для 36 та 39 СЕ однакові.

Таблиця 8

$\frac{a}{h}$	$w_{\text{теор}}, \text{ м}$	$w_{39}, \text{ м}$	$\delta, \%$	$w_{36_LIRA}, \text{ м}$	$\delta, \%$	$w_{144_SCAD}, \text{ м}$	$\delta, \%$
8	0.001369	0.001362	0.5	0.001337	2.4	0.001441	5.3
4	0.000205	0.000201	2.0	0.000200	2.5	0.000241	17.6
2	0.000043	0.000040	7.5	0.000040	7.5	0.000061	41.9

В Табл. 9 зведено результати розрахунків у вигляді відношення отриманих прогинів до аналітичних значень (результат із застосуванням 39 СЕ у чисельнику і 36 СЕ у знаменнику). Аналізуючи результати згущення сітки (Табл. 9), бачимо, що таке згущення асимптотично наближує результат до аналітичного значення. При згущенні сітки з 32x32 до 64x64

таке уточнення вже відсутнє у 39 СЕ та ще відбувається на товщинах 2 м та 4 м у 39 СЕ.

Таблиця 9

$\frac{a}{h}$	$w_{\text{теор.}}, \text{М}$	$\frac{w_{39}/w_{\text{теор.}}}{w_{36}/w_{\text{теор.}}}$				
		4x4	8x8	16x16	32x32	64x64
8	0.001369	<u>0.740</u>	<u>0.931</u>	<u>0.997</u>	<u>0.995</u>	<u>0.995</u>
		0.555	0.820	0.929	0.977	0.990
4	0.000205	<u>0.919</u>	<u>0.966</u>	<u>0.976</u>	<u>0.980</u>	<u>0.980</u>
		0.813	0.909	0.960	0.975	0.979
2	0.000043	<u>0.902</u>	<u>0.911</u>	<u>0.922</u>	<u>0.923</u>	<u>0.925</u>
		0.853	0.898	0.919	0.923	0.925

Слід зазначити, що при розрахунку цієї задачі за теорією тонких пластин при сітці 32x32 похибка складає 7.12%, 28.13% та 115% для товщин 2 м, 4 м та 8 м відповідно, що свідчить про необхідність використання більш точних схем МСЕ.

3. Товста защемлена по контуру плита. Розглянемо задачу про деформування товстої квадратної защемленої по контуру плити під дією поперечного рівномірно розподіленого навантаження (рис. 5), розв'язок якої за допомогою проєкційно-сіткового методу наведено в [3]. В дослідженні розглядаються дві моделі зі співвідношенням довжини прольоту до товщини $2a/h - 5$ та 2. Довжина прольоту плити $2a = 20$ м, інтенсивність поперечного навантаження $p = 10$ кПа, модуль пружності $E = 10$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.25$. Розмір скінченно-елементної сітки - 0.5 м для плити товщиною 10 м та 0.2 м для плити товщиною 4 м.

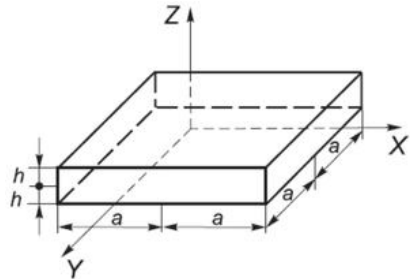


Рис.5

Результати розрахунку в прогинах по центру плити та в інтерпольованих значеннях напружень наведено в Табл. 10-11 для товщин 4 м та 10 м відповідно.

Таблиця 10

z/h	wE/qa			σ_z/q		
	Теор.	39 СЕ	36 СЕ	Теор.	39 СЕ	36 СЕ
1	-5.723	-5.811	-5.808	-0.993	-0.995	-1.012
0	-5.729	-5.841	-5.838	-0.491	-0.499	-0.500
-1	-5.414	-5.643	-5.640	-0.010	-0.009	-0.011

Таблиця 11

z/h	wE/qa			σ_z/q		
	Теор.	39 СЕ	36 СЕ	Теор.	39 СЕ	36 СЕ
1	-1.398	-1.335	-1.334	-1.032	-1.074	-1.021
0	-1.068	-1.045	-1.044	-0.521	-0.526	-0.527
-1	-0.893	-0.893	-0.893	0.041	0.087	-0.012

Слід зазначити, що теоретичний результат теж наближений, і при розрахунку як 39 СЕ так і 36 СЕ показали досить добре до нього наближення. Для порівняння ця задача також була змодельована СЕ на основі теорії Міндліна-Рейснера та теорії тонких пластин. Величина похибки при цьому склала 3.1% і 8.8% та 61% і 369% для плит товщинами 4 м і 10 м.

Висновки. При розв'язанні тестових задач теорії пружності було визначено межі, при яких розв'язки з використанням криволінійних просторових СЕ дають наближення результату до аналітичного значення з похибкою в межах 5%, та показано що в ряді задач його точність не гірша, а іноді вища ніж при використанні ізопараметричних СЕ. При згущенні сітки розв'язок уточнюється, що свідчить про збіжність МСЕ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гоцуляк С. О., Пікуль А. В. Реалізація просторового скінченного елемента в криволінійній системі координат // Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. - Вип.88. - Київ: КНУБА, 2011, с. 91–102.
2. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. Пер. с английского. / Под ред. Э.И. Григолюка – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.
3. Лисицын Б.М. Проекционные и проекционно-сеточные методы. – К.: Вища школа, 1991.
4. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости - М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы – 1955.
5. Пікуль А.В. Врахування ортотропних властивостей матеріалу при моделюванні товстих оболонок просторовими криволінійними скінченими елементами // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. Науч. трудов. Вып.№69. Дн-вск: ГВУЗ ПГАСА, 2013, с. 374–377.
6. Пікуль А.В. Тестування просторового криволінійного скінченного елемента на задачах теорії пружності// Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі: тези доповідей другої Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 26-27 вересня 2018 – с. 91-92.
7. Scadsoft. Толстая квадратная шарнирно-опертая пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки // <https://scadsoft.com/testsscad/index/text/51>.

REFERENCES

1. Hotsuliak Ye. O., Pikul A. V. Realizatsiia prostorovoho skinchennoho elementa v kryvoliniinii sistemii koordynat (The solid finite element realization in curvilinear coordinate system) // Opir materialiv i teoriia sporud: Naukovo-tekhnichnyi zbirnyk. - Vyp.88. - Kyiv : KNUBA, 2011, s. 91–102.
2. Donnell L.G. Balki, plastiny i obolochki. Per. s angliiskogo. / Pod. red. E.I. Grigoliuka. (Beams, plates and shells. Trans. from English) – М.: Nauka. Glavnaia redakcia fiziko-matematicheskoi literatury, 1982.
3. Lisitsyn B.M. Proektsyionnye i proektsyonno-setochnye metody (Proective and proective-mesh method). – К.: Vyshcha shkola, 1991.
4. Lurie A.Y. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (Three-dimensional problems in the theory of elasticity)- М.:Hos. izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoi literatury – 1955.
5. Pikul A.V. Vrahuvannia ortotropnykh vlastyvostei materialu pry modeliuivanni tovstykh obolonok prostоровymy kryvoliniinymy skinchennymy elementamy (Account of orthotropic material properties in simulation of thick shells with 3D curvilinear finite elements) // Stroitelstvo, materialovedenie, mashinostroenie: Sb. Nauch. trudov. Vyp.№69. Dn-vsk : HVUZ PHASA, 2013, s. 374–377.
6. Pikul A.V. Testuvannia prostorovoho kryvoliniinoho skinchennoho elementa na zadachakh teorii pruzhnosti (Testing of curvilinear solid finite element on problems in the theory of elasticity)// Suchasni metody i problemno-orientovani komplekxy rozrakhunku konstruktсии i yikh

zastosuvannya u proektuvanni i navchalnomu protsesi: tezy dopovidei druzhoi Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii, m. Kyiv, 26-27 veresnia 2018 – s. 91-92.

7. Scadsoft. Tolstaia kvadratnaia sharnirno-opertaia plastina pod deistviem poperechnoi ravnomerno raspredelennoi nagruzki (Thick square plates under the action of a transverse uniformly distributed load)// <https://scadsoft.com/testsscad/index/text/51>.

Стаття надійшла 18.05.2018

Ivanchenko G.M., Pikul A.V.

FINITE ELEMENTS CONVERGING TESTING ON THE BASYS OF THEORY OF ELASTICITY PROBLEMS WITH USING CURVILINEAR SOLID FINITE ELEMENT

This paper considers the testing of the finite element method based on three-dimensional problems in the theory of elasticity using the curvilinear solid finite elements. These elements implemented in the scope of the thesis research [1, 5] and realized within Solver of the software package "LIRA-SAPR" with the number 39. The test based on comparison between the obtained results and precise analytical solution and another finite elements models which exist on the software.

The theory of thin plates and shells created based on the correspondence creation, which follows the Kirchhoff-Love hypothesis. This theory does not allow taking into account the difference of the stress function over the thickness of the plate. The thickness increasing of such elements leads to an increase of inaccuracy when calculating the structures with stress concentrators. We can also get somewhat better results using the elements based on the Mindlin-Reissner plate theory, which takes into account the deformation of the transverse shear.

It is possible to evaluate more correctly the stress-strain state of projected structures using curvilinear solid finite elements in the simulation and calculation of non-thin plates and shells.

Convergence of the finite element method is an important characteristic, since it determines the suitability of a finite element for constructing simulations. Since the approximation, as a rule, gives an approximate description of the deformation distribution within an element, hence the results of the calculation of the construction generally are also approximate. That is why the question about the accuracy, stability and convergence of the solution obtained by the method of finite elements remains important.

As a test, it is considered the following tasks. The Lamé problem of the stress-strain situation of the thick-walled cylinder under the external and internal pressure. The bend of the hinged and fixed along the contour thick square plates under the action of a transverse uniformly distributed load. The results of the calculation are compared with the theoretical solutions contained in the works of Lurie A. [4], Donnell L. [2], Lisitsyn B. [3] and others. To compare the accuracy, the problems also was modeled using the isoparametric finite elements from SP "LIRA-SAPR" and the SP "SCAD Office".

In the study of convergence of FEM while modeling the thick cylinder, it was defined the limits of applicability of the curvilinear finite element.

Key words: finite element method, thick plates, thick shells, curvilinear solid finite element, Lamé problem.

Иванченко Г.М., Пикуль А.В.

ТЕСТИРОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МКЭ НА ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КРИВОЛИНЕЙНОГО КЭ

В данной работе приведены результаты тестирования метода конечных элементов с использованием криволинейного пространственного конечного элемента на двух типах задач теории упругости (равновесие толстостенного цилиндра под действием внешнего и внутреннего давления, равновесие толстых плит с разными условиями закрепления) с разными параметрами и сгущением сетки дискретизации. Результаты исследования сравниваются с известными аналитическими решениями, а также с решениями полученными другими схемами метода конечных элементов в ПК «ЛИРА-САПР» и ПК «SCAD Office».

Ключевые слова: метод конечных элементов, толстые пластины, толстые оболочки, криволинейный пространственный конечный элемент, задача Ламе.

УДК 539.3

Іванченко Г.М., Пікуль А.В. Тестування збіжності МСЕ на задачах теорії пружності при використанні просторового криволінійного СЕ // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 172-180.

Наведено результати тестування методу скінченних елементів з використанням криволінійного просторового скінченного елемента на двох типах задач теорії пружності (рівновага товстостінного циліндра під дією зовнішнього та внутрішнього тиску, рівновага товстих плит з різними умовами закріплення) з різними параметрами та згущенням сітки дискретизації. Результати дослідження порівнюються з відомими аналітичними розв'язками, а також з розв'язками отриманими іншими схемами методу скінченних елементів в ПК «ЛІРА-САПР» та ПК «SCAD Office».

Табл. 11. Іл. 5. Бібліогр. 7 назв.

UDC 539.3

Ivanchenko G.M., Pikul A.V. Finite elements converging testing on the basys of theory of elasticity problems with using curvilinear solid finite element // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 172-180.

In this paper, we present the results of the finite elements method testing using a curvilinear three-dimensional finite element based on the two types of elastic theory problems. The equilibrium of a thick-walled cylinder under the influence of external and internal pressure and the equilibrium of thick plates with different fixing conditions with different parameters and condensation of the sampling grid. The results of the study are compared with the known analytical solutions, as well as with the solutions obtained by other schemes of the method of finite elements on the SP "LIRA-SAPR" and the SP "SCAD Office".

Tabl. 11. Il. 5. Ref. 7.

Іванченко Г.М., Пікуль А.В. Тестирование сходимости МКЭ на задачах теории упругости при использовании пространственного криволинейного КЭ // Сопрогивление материалов и теория сооружений. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 172-180.

Приведены результаты тестирования метода конечных элементов с использованием криволинейного пространственного конечного элемента на двух типах задач теории упругости (равновесие толстостенного цилиндра под действием внешнего и внутреннего давления, равновесие толстых плит с разными условиями закрепления) с разными параметрами и згущением сетки дискретизации. Результаты исследования сравниваются с известными аналитическими решениями, а также с решениями полученными другими схемами метода конечных элементов в ПК «ЛІРА-САПР» и ПК «SCAD Office».

Табл. 11. Ил. 5. Библиогр. 7 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ІВАНЧЕНКО Григорій Михайлович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельної механіки, Іванченко Григорій Михайлович.

Адреса домашня: Україна, м. Київ, вул. Заслонова, 9, п. 80.

Робочий тел.: +38(044) 248-32-37;

Мобільний тел.: +38(067) 597-19-48;

E-mail: ivgm61@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1172-2845>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): асистент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій КНУБА ПІКУЛЬ Анатолій Володимирович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра металевих та дерев'яних конструкцій, Пікуль Анатолій Володимирович.

Адреса домашня: Україна, м. Київ, вул. Бальзака, 56, кв. 148.

Мобільний тел.: +38(097) 217-68-79;

E-mail: anato1pikul@gmail.com

УДК[624.074.43:624.012.35](088.87)

РАЦІОНАЛІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК

Л.В. Гапонова¹,

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри будівельних конструкцій

О.О. Калмиків¹,

канд. техн. наук, доцент кафедри будівельних конструкцій

С.С. Гребенчук²,

головний інженер

¹Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова, Харків

²ТОВ «Будівельник», Харків

Представлено постановку й реалізацію завдання щодо раціоналізації конструктивних параметрів залізобетонних конструктивно-анізотропних оболонок. За критерій для даної задачі обрано енергетичний принцип, згідно з яким із усього ряду можливих значень шуканих параметрів системи з постійним об'ємом матеріалу, числом зовнішніх і внутрішніх зв'язків потенційна енергія деформації (ПЕД) після перебудови досягне нижньої межі на раціональному поєднанні величин геометричних параметрів.

Ключові слова: раціоналізація, потенційна енергія деформації, конструктивних параметрів, залізобетонна анізотропна оболонка.

Постановка проблеми. Дуалізм світу зумовлює прямий пошук конструктивних рішень механічних систем, що розвиваються в напрямках наукових праць В.С. Шмуклера [1].

- створення елементів (конструкцій) з максимальною несучою здатністю і/або жорсткістю при заданій витраті матеріалів;

- створення елементів (конструкцій) з мінімальною витратою матеріалів при заданому ресурсі.

В обох випадках проблема зводиться до постановок і рішень нелінійних задач раціоналізації (оптимізації). Як відомо, ступінь складності застосовуваних методів і алгоритмів реалізації, в цьому випадку, істотно вище, ніж при перевірному (традиційному) підході. Крім того, рішення, що формуються, безпосередньо пов'язані з конкретними умовами навантаження і спирання конструктива, що локалізує сферу їх застосування.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Оригінальними методами, що складають основу сучасної теорії управління параметрами конструкцій займалися такі вчені, як Н.П. Абовський [2], А.С. Городецький [3], А.В. Перельмутер [4], А.Л. Гольдененвейзер [5], С.П. Тимошенко [6], Chien Wei-Zang [7], Reissner E. [8], Shanley F. [9] і багато інших авторів.

Поняття «раціональна конструкція» вдалось дещо конкретизувати і трансформувати за допомогою цікавих ідей і досліджень Г.В. Василькова і В.С. Шмуклера. Також впровадженню у практику проектування прямих методів сприяли, з одного боку, способи трактування власного поняття «раціональне рішення», а з іншого – широке використання методу

скінченних елементів (МСЕ). Незважаючи на численні наукові праці за цим напрямком, сьогодні, на жаль, відсутні роботи з нелінійного чисельного дослідження двопоєсних анізотропних оболонок із ребрами в різних напрямках. Зважаючи на даний факт, а також з метою розширення наявної інформації на базі проведеного аналізу зроблено висновки та сформульована задача цього дослідження.

Викладення основного матеріалу. Ідеологія постановок задач прямого проектування, про що йтиметься далі, передбачає (нехай і наближено) відображення двох обставин:

- введення в якості критерію єдиної функції мети;
- введення в обмеження умови, пов'язаної з управлінням напружено-деформованим станом (НДС).

У цьому випадку, як відомо, може бути досягнуте значне спрощення постановок задач раціоналізації параметрів конструктиву. Тут передбачається, що однаковий запис функції мети відображає можливість наближеної еквівалентної заміни традиційних критеріїв (вартість, вага, обсяг і т.д.) одним, пов'язаним, при цьому, з характером і особливостями НДС. Аналогічна вимога висувається і до обмежень, що задають управління НДС.

При цьому, було визнано за доцільне для побудови еталонного рішення використовувати нові положення, засновані на енергетичних принципах [1], а саме:

- твердження про те, що для регульованих систем з постійним об'ємом матеріалу, числом зовнішніх і внутрішніх зв'язків (зовнішні параметри) під дією статичного зовнішнього навантаження - власної ваги, потенційна енергія деформації (ПЕД) після перебудови досягає нижньої межі на раціональному поєднанні величин геометричних параметрів:

$$U = \inf_{\alpha} U(\alpha^k), \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (1)$$

де U - ПЕД; k - номер варіанта порівняння; $\alpha \in M$; M - безліч допустимих значень зовнішніх геометричних параметрів.

Положення (1) може бути поширене на випадок присутності на безлічі віртуальних навантажень домінуючого. Зокрема, при компонованні тонкостінного елемента, що зазнає деформацію вигину кручення, можна мінімізувати крутний момент за рахунок проходження вектора навантаження через центр вигину, що буде відповідати виконанню (1).

- вимоги ізоенергетичності стану системи (конструкції), тобто такого, за яким:

$$e[\{\bar{x}\}] = const, \quad (2)$$

де e - щільність потенційної енергії деформацій (ЩПЕД); $\{\bar{x}\}$ - вектор внутрішніх параметрів.

Розв'язок практичних задач з критерієм (1), до певної міри, підтверджує ефективність його застосування, а також можливість регулювання не тільки геометричними, але фізико-механічними характеристиками системи [1, 10, 11].

Прийmemo, в стилі [1], що під зовнішніми екстенсивними параметрами розуміються параметри, які визначають опірність системи без зміни

загального обсягу матеріалу (габарити елементів системи, координати опорних зв'язків і місць прикладання навантажень і т.п.), внутрішні інтенсивні параметри визначають топологію, обсяг, а також властивості матеріалів.

Слід також зазначити, що наслідком першого положення, крім подання (1), є наступне:

- при лавиноподібному усуненні в'язей, внаслідок появи пластичних шарнірів, аж до появи граничного стану, коли система перетворюється в механізм, ПЕД зростає і досягає верхньої межі:

$$U_u = \sup U, \quad (3)$$

де U_u - гранична величина ПЕД.

Умова (3) може бути використана при визначенні найбільш небезпечного поєднання навантажень, в разі різноманіття завантажень. Очевидно, що найбільш небезпечному завантаженню (у випадку пружного деформування) буде відповідати більша величина ПЕД;

Наслідком критерію (2) є те, що при $e = e_u$ у всіх точках конструкції досягається глобальний мінімум витрат матеріалів (1). Тут фундаментальна структуроутворююча величина e_u - ресурс, суть - міра в'язкості матеріалу або гранична щільність енергії деформування [1]. Вона визначається роботою, що витрачається на деформацію зразка аж до його руйнування, що припадає, на одиницю об'єму і вимірюваної площею індикаторної діаграми деформування матеріалу. З величиною ресурсу пов'язана дуже цінна якість конструкції - резильянс, який визначається кількістю пружної енергії, яку можна запасти в ній. У свою чергу, ізоенергетичність, породжувана (2), як раціональна форма існування штучних елементів, забезпечує найбільш прийнятний розподіл матеріалу, а також його ефективну роботу в конструкції. Застосовуючи до (2) ітераційний підхід, який базується на методі адаптивної еволюції (МАНЕ), для будь-якого геометричного або фізико-механічного параметра конструкції можна записати [10]:

$$h_{i+1} = h_i [e_i e_{iu}^{-1}]^\gamma, \quad (4)$$

де h – геометричний (фізико-механічний) параметр системи; i – номер ітерації; $\gamma \in (0,1)$ - характеристика адаптивної еволюції, що відображає швидкість збіжності.

Введені положення дозволяють не тільки позначити еталонне рішення, але і, що є дуже важливим, побудувати енергетичний портрет конструкції. Під енергетичним портретом конструкції розуміється 3D-побудова і відображення поля щільності енергії деформації з одночасним визначенням ПЕД. Дана обставина, поряд з визначенням раціональної топології системи (не тільки форма, а й зміст), зумовлює встановлення граничного стану як для структурних елементів конструкції (наприклад, скінченних елементів) так і для системи в цілому. Крім того, за умови збіжності процедури (4), відбувається відсів ненавантажених (паразитуючих) елементів системи. Відзначимо, що крім мінімізації витрат матеріалів критерії (1), (2) можуть бути використані для наближеної оцінки деяких важливих механічних характеристик.

Реалізація підходу передбачає побудову взаємозв'язку між величиною енергії деформації системи і однією або групою геометричних параметрів.

Постановка подібної задачі в чисельному вигляді можлива при застосуванні обчислювальних програмних комплексів, однак, операція передбачає побудову значної кількості моделей, що до певної міри ускладнює процес.

Представлена постановка і реалізація задачі раціоналізації конструктивних параметрів запропонованих залізобетонних оболонок. В якості критерію для даної задачі приймається енергетичний принцип, згідно з яким передбачається, що з усієї безлічі можливих значень шуканих параметрів системи з постійним об'ємом матеріалу, числом зовнішніх і внутрішніх в'язей, потенціальна енергія деформації (ПЕД) після перебудови досягне нижньої межі на раціональному поєднанні величин геометричних параметрів, що описують систему.

Реалізація підходу, у даному випадку, передбачає побудову взаємозв'язку між величиною енергії деформації системи і одним або групою геометричних параметрів (5).

В роботі реалізовані чисельні методи розв'язку поставленої задачі на прикладі циліндричної оболонки, що має внутрішні порожнини прямокутної в плані форми (рис. 1).

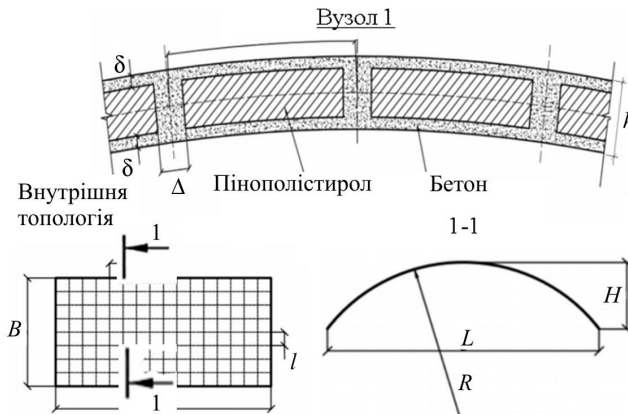


Рис. 1. Розглянута оболонка

У розгляд вводиться вектор керуючих параметрів даної системи:

$$\{x\}^T = \{H, B, V, R, L, l, q, \delta, \Delta, h\}, \quad (5)$$

де H – стріла підйому; B – довжина оболонки; V – об'єм матеріалу; R – радіус кривизни; L – проліт оболонки; l – крок ребер; q – зовнішнє навантаження; δ – товщина обшивок; Δ – товщина ребер; h – висота перерізу оболонки.

При цьому параметри H, B, R, L, q – позиціонуються як зовнішні, а параметри l, δ, Δ, h – як внутрішні.

За інструментарій для вирішення поставленого завдання використовувалась зв'язка програмних продуктів компанії Autodesk. Основоположним тут є скрипт, розроблений у середовищі візуального програмування Dypato, який дозволяє автоматично формувати геометрію

оболонки шляхом задавання всіх необхідних параметрів із числа $\{x\}$. Запропонована процедура дозволяє в автоматичному режимі вибудовувати взаємозв'язок між ПЕД системи і будь-яким геометричним параметром, що її описує. Для ілюстрації розглянуто приклади пошуку зовнішніх і внутрішніх раціональних параметрів оболонки. При аналізі зовнішніх параметрів як змінний прийнято стрілу підйому $H \in (H [0; L/2])$, інші параметри, що описують геометрію системи, прийнято такі: $B=9000$ мм; $L=18000$ мм; $h=300$ мм; $\Delta=100$ мм; $l=1000$ мм. В якості навантаження прийнято власну вагу, опирання призначено шарнірно нерухомим за двома поздовжніми ребрами, матеріал – бетон C25/30. У загальному вигляді процедура визначення НДС оболонки представлена алгоритмом (рис. 2).

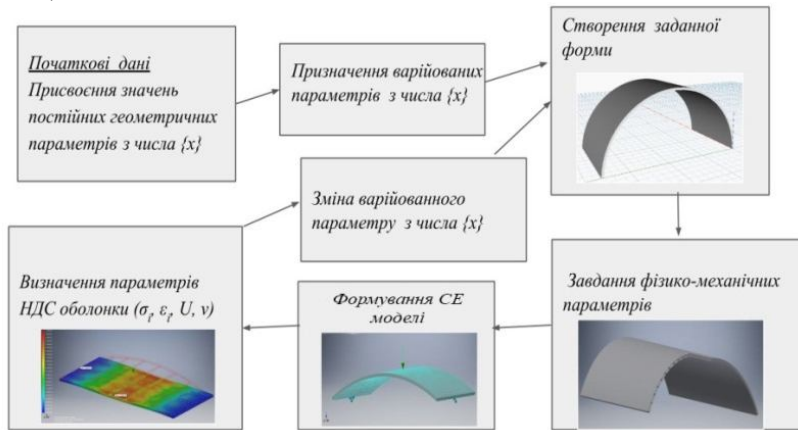


Рис. 2. Блок-схема алгоритму обчислення НДС системи

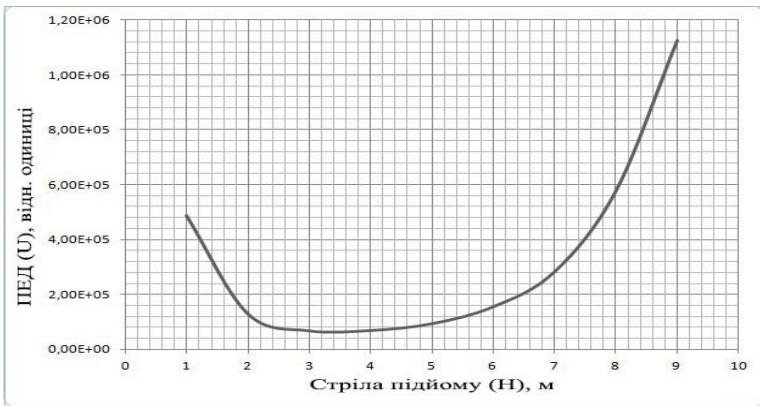
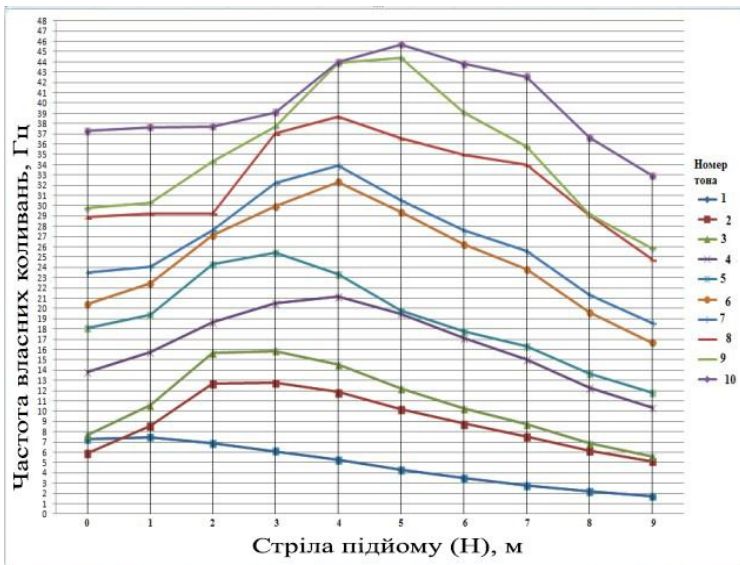
Покроково змінюючи параметр H , визначено його взаємозв'язок із величиною ПЕД системи, при цьому в усіх випадках об'єм матеріалу оболонки досі був незмінний – його сталість забезпечувалась шляхом підбору відповідного значення товщини обшивки δ . Результати розрахунку наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Результати розрахунку

Стріла підйому $H, м$	Об'єм матеріалу $V, м^3$	Радіус кривизни R	Товщина обшивок $\Delta, мм$	Довжина дуги, м	ПЕД системи $U, відн. од.$
0	22,89	∞	50,60	18,00	5,75E+06
1	22,89	41,00	50,00	18,14	4,87E+05
2	22,89	21,25	47,30	18,58	1,30E+05
3	22,89	15,00	45,0	19,30	7,57E+04
4	22,89	12,12	40,70	20,28	6,93E+04
5	22,89	10,60	35,70	21,50	9,38E+04
6	22,89	9,75	31,50	22,93	1,55E+05
7	22,89	9,28	27,10	24,55	2,83E+05
8	22,89	9,06	22,40	26,34	5,77E+05
9	22,89	9,00	18,70	28,27	1,12E+06

На підставі отриманих даних побудовано графік залежності ПЕД від стріли підйому H (рис. 3), який уявляє собою унімодальну функцію. Визначено, що для заданих умов при $H \approx 3,8$ м ПЕД досягає нижньої межі. Отримані результати верифіковані шляхом аналізу частот власних коливань системи для всіх значень H та оцінки максимальної несучої здатності (q_{\max}) оболонки. З графіків (рис. 4.), видно, що 7 із 10 тонів власних коливань приймають максимальні значення при значенні H близькому до раціонального. З умови досягнення еквівалентних напружень системи (σ_e) межі міцності матеріалу визначена q_{\max} для оптимального значення H і значень на 1 м більше і менше від раціонального (4,8 і 2,8 м відповідно) (рис.5, 6, 7). Так при $H = 3,8$ м $q_{\max} = 38,45$ кН/м²; при $H = 4,8$ м $q_{\max} = 35,15$ кН/м²; при $H = 2,8$ м $q_{\max} = 30,26$ кН/м².

Рис. 3. Взаємозв'язок стріли підйому H і ПЕДРис. 4. Взаємозв'язок стріли підйому H і частот власних коливань

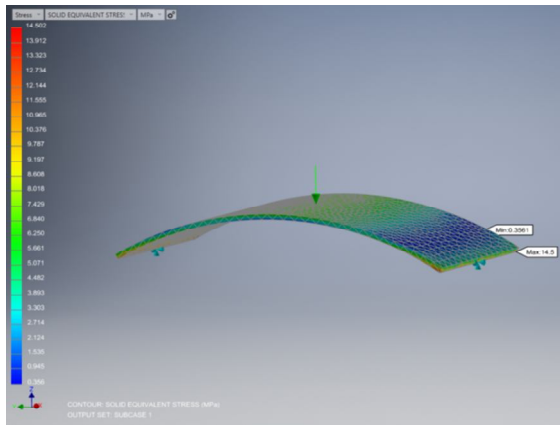


Рис. 5. Щільність потенційної енергії оболонки прогоном 9000 мм з висотою стріли 2800 мм від максимального навантаження

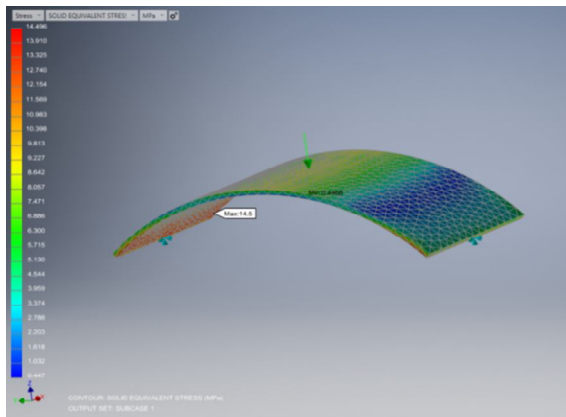


Рис. 6. Щільність потенційної енергії оболонки прогоном 9000 мм з висотою стріли 3800 мм від максимального навантаження

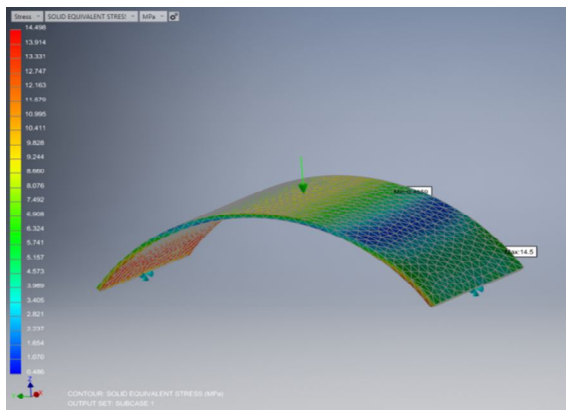


Рис. 7. Щільність потенційної енергії оболонки прогоном 9000 мм з висотою стріли 4800 мм від максимального навантаження

Висновки. Обґрунтовано, що при застосуванні в якості критерію раціоналізації мінімального значення потенціальної енергії деформації, зовнішні параметри оболонки (стріла підйому, крок ребер, тощо), що визначені, забезпечують максимальну несучу здатність конструкції, максимізацію частоти основного тону власних коливань та мінімальні прогини системи.

Визначено, що для розглянутих конкретних умов при значенні стріли підйому $H \approx 3,8$ м потенціальна енергія деформації досягає нижньої межі. Отримані результати верифіковані шляхом аналізу частот власних коливань системи для всіх значень H та оцінки максимальної несучої здатності q_{max} оболонки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шмуклер В.С. Каркасные системы блегченного типа // В.С. Шмуклер, Ю.А. Климов, Н.П. Буряк. Харьков: Золотыестраницы, 2008, 336 с.
2. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Подред. Абовского Н.П. Наука, 1978. - 228 с.
3. Городецкий А.С., Гордон Л.А., Готтлид А.А. Статический расчет бетонных и железобетонных конструкций гидротехнических сооружений. - М.: Энергоиздат, 1982. - 240с.
4. Перельмутер А.В. Управление поведением несущих конструкций. - 2011. - 184с.
5. Гольдвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - 1976. - 512 с.
6. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки. - М.: ЮГИЗ, 1948. - 460 с.
7. Chen W.T. A hyperboloidal Notchin a transversely isotropic material under pure shear // Journal of Elasticity. - 1972. - Т. 2. - №. 2. - С. 113-122.
8. Reissner E. On a Variational Theorem in Elasticity.- J. Math. and Phys., 1950, rol.29, № 2.
9. Shanley F. Weight-Strength Analysis of Aircraft Structures. - N.York, McGraw-Hill, 1952.
10. Шмуклер В.С. Новые энергетические принципы рационализации конструкций / В.С. Шмуклер // Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту. - 2017. - Вип. 167. - С. 54-69.
11. Kalmykov O. Use of information technologies for energetic portrait construction of cylindrical reinforced concrete shells / Oleg Kalmykov, Ludmila Gaponova, Petro Reznikand, SergeyGrebenchuk // 6th International Scientific Conference "Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings MATEC WebConf. Volume 116, 2017 " (Transbud-2017). 10 July 2017.
12. Gaponova L.V. Stress and strain behavior of reinforced concrete anisotropic shell / L.V. Gaponova, S.S. Grebenchuk // Academic Journal. Series: Industrial machine building, Civil Engineering / Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University – 1 (48) 2017. – С. 108-120.

REFERENCES

1. Shmukler V.S. Karkasnyye sistemy oblegchennogo tipa (Frame-typesystemsofthelighttype) // VS.Shmukler, Yu.A. Klimov, N.P. Beet. Kharkiv: GoldenPages, 2008, 336 pp.
2. Abovsky N.P., Andreev N.P., Deruga A.P. Variatsionnyye printsipy teorii uprugosti i teorii obolochek (Variational Principles of the Theory of Elasticity and Shell Theory) / Under the Rev. A. Abovskogo NP: Nauka, 1978.-228 p.
3. Gorodetsky A.S., Gordon L.A., Gottlide A.A. Statcheskiy raschet betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksiy gidrotekhnicheskikh sooruzheniy (Static calculation of concrete and reinforced concrete structures of hydraulic engineering structures). - M.: Energoizdat, 1982.-240s.
4. Perelmutter AV. Upravleniye povedeniyem nesushchikh konstruksiy (Control of the behavior of bearing structures).- 2011.- 184p.
5. Goldveiser A.L. Teoriya uprugikh tonkikh obolochek (The theory of elastic thin shells). - 1976 - 512 pp.
6. Tymoshenko S.P. Plastiny i obolochki (Plates and shells). - Moscow: YUGIZ, 1948. - 460 pp.
7. Chen W.T. A Hyperboloidal Notchin a Transversely IsotropicMaterial under a Clean Shear // JournalofElasticity. - 1972. - Т. 2. - No. 2. - P. 113-122.

8. *Reissner E.*, Reissner E. On a Variational Theorem in Elasticity. J. Math. And Phys. - 1950, p. 29, No. 2.
9. Shanley F. WeightStrengthAnalysisofAircraftStructures. N.York, McGraw-Hill, 1952.
10. *Shmukler V.S.* Novyye energeticheskiye printsiy racionalizatsii konstruksiy (New Energy Principles for the Rationalization of Structures) / V.S. Shmukler // Collection of scientific works of the Ukrainian State University of Railway Transport. - 2017 - Voip. 167. - P. 54-69.
11. *Kalmykov O.* Use of information technologies for energetic portrait construction of cylindrical reinforced concretes shells / Oleg Kalmykov, Ludmila Gaponova, Petr Reznik and Sergey Grebenchuk // 6th International Scientific Conference "Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings MATEC WebConf. Volume 116, 2017 "(Transbud-2017) on 10 July 2017.
12. *Gaponova L.V.* Stress and strain behavior of reinforced concrete anisotropic shell / L.V. Gaponova, S.S. Grebenchuk // Academic Journal. Series: Industrial machine building, Civil Engineering / Poltava National Technical University Yuri Kondratyuk. - 1 (48) 2017. - C.108-120.

Стаття надійшла 21.03.2018

Gaponova L., Kalmykov O., Grebenchuk S.

RATIONALIZATION OF THE PARAMETERS OF REINFORCED-CONCRETE ANISOTROPIC SHELLS

The formulation and realization of the task of rationalization of the structural parameters of the proposed reinforced concrete shells is presented. As a criterion for this task, an energy principle is adopted, according to which it is assumed that from the whole set of possible values of the desired parameters of the system with a constant volume of material, the number of external and internal connections, the potential energy of deformation after the reorganization will reach the lower limit on the rational combination of the values of the geometric parameters describing the system.

The proposed procedure allows, in the automatic mode, to construct the relationship between the DED system and any geometric parameter that describes it. For illustration, examples of searching for external and internal rational shell parameters are considered. In the analysis of external parameters as an alternating one, the lifting arm ($H [0; L/2]$), other parameters describing the geometry of the system, are taken: $B = 9000$ mm; $L = 18000$ mm; $h = 300$ mm, $\Delta = 100$ mm; $l = 1000$ mm. As the load is taken its own weight, the bolt is designed to be hingedly fixed for two longitudinal ribs, the material is concrete C25 / 30.

Implementation of the approach, in this case, involves the construction of the relationship between the magnitude of the deformation energy of the system and one or group of geometric parameters. The energy principle is taken as a criterion for this task, according to which it is believed that out of numerous possible values of the searched parameters of the system with the constant amount of material, number of external and internal connections, the strain potential energy (SPE) after the reconstruction will reach the lower limit on the rational connection of the geometrical parameters describing the system. In this case, the approach realization presupposes the construction of interconnection between the system energy deformation value and one or group of the geometrical parameters. The suggested procedure allows automatic establishment of the connection between the system SPE and any geometrical parameters which describes it. The obtained results of the external parameters are verified through the analysis of the frequencies of the systems natural vibration frequencies for all values of rise H and maximum shell bearing capacity (q_{max}). It was determined that for the conditions at the camber of arch $H \approx 3,8$ m SPE reaches the lower limit.

Key words: rationalization, potential energy of deformation. structural parameters, reinforced concrete anisotropic membrane.

Гапонова Л.В., Калмыков О.О., Гребенчук С.С.

РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Представлены постановка и реализация задачи по рационализации конструктивных параметров железобетонных конструктивно-анизотропных оболочек. Критерием для данной задачи избран энергетический принцип, согласно которому со всего ряда возможных значений искомым параметрам системы с постоянным объемом материала, числом внешних и внутренних связей потенциальная энергия деформации (ПЭД) после перестройки достигнет нижней границы на рациональном сочетании величин геометрических параметров.

Ключевые слова: рационализация, потенциальная энергия деформации, конструктивные параметры, железобетонная анизотропная оболочка.

УДК[624.074.43:624.012.35](088.87)

Гапонова Л.В., Калмыков О.О., Гребенчук С.С. Рационалізація параметрів залізобетонних анізотропних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 181-190.

Представлено постановку і реалізацію задачі з раціоналізації конструктивних параметрів залізобетонних конструктивно-анізотропних оболонок.

Табл. 1. Іл. 7. Бібліогр. 12 назв.

Gaponova L.V., Kalmykov O.A., Grebenchuk S.S. Rationalization of the parameters of reinforced concrete anisotropic membranes // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 181-190. – Ukr.

The formulation and realization of the problem of rationalization of structural parameters of reinforced concrete structural anisotropic membranes is presented.

Tables 1. Fig. 7. Ref. 12.

Гапонова Л.В., Калмыков О.А., Гребенчук С.С. Рационализация параметров железобетонных анизотропных оболочек // «Сопротивление материалов и теория сооружений». - 2018. - Вип. 100. - С. 181-190.

Представлена постановка и реализация задачи по рационализации конструктивных параметров железобетонных конструктивно-анизотропных оболочек.

Табл. 1. Ил. 7. Библиогр. 12 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):

кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельних конструкцій Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова Гапонова Людмила Вікторівна.

Адреса робоча: 61002, Україна, м. Харків, вул. Маршала Бажанова, 17.

Мобільний тел.:+38(066)-366-00-57

E-mail: gaplyudmila@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6038-2624>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):

кандидат технічних наук, декан факультету по роботі з іноземними студентами, Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова Калмыков Олег Олександрович.

Адреса робоча: 61002, Україна, м. Харків, вул. Маршала Бажанова, 17.

Робочий тел.:+38(057)-706-15-48

Мобільний телефон:+38(063)-104-55-53

E-mail: olegkalmikov010@gmail.com

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):

головний інженер ТОВ «Будівельник» Гребенчук Сергій Сергійович

Адреса робоча:61002, Україна, м. Харків, вул. Мироносицька, 54.

Мобільний тел.: (050)301-25-29;

E-mail: a.mania0502@icloud.com

УДК 539.3

ПРО ОДИН ВАРІАНТ ОДНОВИМІРНИХ РОЗРАХУНКОВИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НДС НЕТОНКИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

О.А. Шорін,

аспірант кафедри опору матеріалів

*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

В статті розглядається узагальнення методу прямих на дослідження напружено-деформованого стану пластин досить складної форми, в постановці плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація або плоский напружений стан), які раніше не розглядалися класичним варіантом методу прямих. Побудовано систему розрахункових рівнянь, поставлено граничні задачі, які передбачається розв'язувати ефективним чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Ключові слова: теорія пружності, метод прямих, чисельно-аналітичний метод, проєкційний метод, одновимірні граничні задачі, плоска деформація, напружено-деформований стан, редуковані рівняння, метод дискретної ортогоналізації, пластина змінної товщини.

Вступ. Метод прямих [1]-[3], [5]-[6] є одним із ефективних методів будівельної механіки, згідно якого розрахунок просторових задач теорії пружності виконується поетапно – на першому етапі знижується вимірність вихідних рівнянь, а на другому редуковані рівняння розв'язуються аналітично або чисельно. Традиційно в методі прямих зниження вимірності за однією чи за двома просторовими координатами виконувалось за допомогою метода скінчених різниць, що значно зменшувало можливості застосування на другому етапі сучасних чисельних методів.

В низці публікацій [7]-[10] було запропоновано для зниження вимірності вихідних рівнянь використовувати проєкційний метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова з локально зосередженими базисними функціями. Оскільки ці функції не є ортогональними, то для застосування такого підходу використовується тензорна символіка та відповідні правила операцій з індексними величинами. Згідно тензорної символіки будь-який вихідний функції двох просторових змінних $f(x, y)$ відповідає два варіанта коефіцієнтів в розкладі за базисом – контраваріантні компоненти, які є коефіцієнтами відносно основного базису та коваріантні, що є моментами відносно елементів основного базису.

В наших роботах [10]-[11] запропоновано новий підхід до побудови розрахункових одновимірних рівнянь для об'єктів більш складної форми – нетонких пластин змінної товщини. Як показали подальші дослідження удосконалення запропонованої методики полягає в побудові редукованих рівнянь відносно невідомих функцій, які мають більш простий фізичний зміст, аніж ті, що використовувались в [10]-[11]. В даній роботі виконується таке удосконалення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Автори сучасних публікацій дотримуються традиційних методів побудови редукованих

диференційних рівнянь, використовуючи скінченно-різницевий метод на першому етапі, аналітичні або чисельні методи для розв'язання системи звичайних диференційних рівнянь на другому етапі.

Мета та завдання. Побудова розрахункових рівнянь нового типу із орієнтацією на подальше застосування методу дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [4] для дослідження НДС нетонких пластин змінної товщини.

Основна частина. При зниженні вимірності рівнянь теорії пружності [10] редуковані рівняння можна отримати в коефіцієнтах (вони також є моментами відносно елементів взаємного базису), або в моментах, які відповідно є коефіцієнтами відносно взаємного базису. Ці системи редукованих рівнянь дають однакові розв'язки, оскільки співпадають з точністю до лінійного перетворення. Але для застосування в одних задачах більш зручно користуватися редукованими рівняннями в моментах, в інших рівняннями в коефіцієнтах. Крім того, слід враховувати, що якщо функції основного базису є локально зосередженими, то взаємний базис визначений на всьому відрізку визначення невідомих функцій.

В наших роботах [10]-[11] побудовані редуковані рівняння в моментах для пластин змінної товщини.

Оскільки відповідні рівняння в коефіцієнтах будуються нетривіально, то в даній роботі детально описується процес побудови редукованих рівнянь в коефіцієнтах.

В якості вихідної розглядається плоска задача теорії пружності, визначена в області D , яка віднесена до декартової системи координат (рис. 1).

В якості вихідних рівнянь плоскої задачі теорії пружності розглядаємо систему рівнянь в мішаній формі – відносно переміщень та напружень:

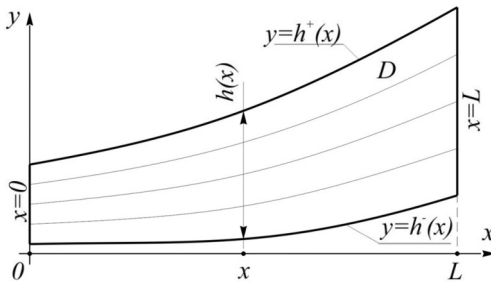


Рис. 1. Розрахункова область D

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_x - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= \tau_{xy} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут позначено $\tilde{u} = \mu u$;
 $\tilde{v} = \mu v$.

До цієї системи приєднується рівняння:

$$\sigma_y = \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_x. \quad (2)$$

Яке дозволяє в редукованих рівняннях виключити σ_y з останнього рівняння системи (1). Слід зазначити, що рівняння (1) - (2) отримані з основної системи рівнянь плоскої задачі теорії пружності виключенням із них компонентів тензора деформації через компоненти тензора напружень за допомогою співвідношень закону Гука.

Передбачається, що тіло, переріз якого займає область D , знаходиться у рівновазі під дією внутрішніх об'ємних сил X та Y та зовнішніх сил і

кінематичних впливів на границі тіла. Відповідно на ділянках граничної поверхні тіла задано граничні умови, які випливають з умов рівноваги приграничних ділянок (рис. 2) і мають вигляд:

- на торцевій площині $x = 0$:

$$\begin{aligned} k_{xx}^0 \cdot u(0, y) - \sigma_x(0, y) &= k_{xx}^0 \cdot \Delta_{xx}^0(y) + q_{xx}^0(y), \\ k_{xy}^0 \cdot v(0, y) - \tau_{xy}(0, y) &= k_{xy}^0 \cdot \Delta_{xy}^0(y) + q_{xy}^0(y); \end{aligned} \tag{3}$$

- на торцевій площині $x = L$:

$$\begin{aligned} k_{xx}^L \cdot u(L, y) + \sigma_x(L, y) &= k_{xx}^L \cdot \Delta_{xx}^L(y) + q_{xx}^L(y), \\ k_{xy}^L \cdot v(L, y) + \tau_{xy}(L, y) &= k_{xy}^L \cdot \Delta_{xy}^L(y) + q_{xy}^L(y). \end{aligned} \tag{4}$$

На бокових поверхнях граничні умови запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, h^+) &= \sigma_x(x, h^+) \frac{dh^+(x)}{dx} - k_x^+ B^+(x) u(x, h^+) + q_x^+(x) B^+(x) + k_x^+ B^+(x) \Delta_{yx}^+(x), \\ \sigma_y(x, h^+) &= \tau_{xy}(x, h^+) \frac{dh^+(x)}{dx} - k_y^+ B^+(x) v(x, h^+) + q_y^+(x) B^+(x) + k_y^+ B^+(x) \Delta_{yx}^+(x), \\ \tau_{xy}(x, h^-) &= \sigma_x(x, h^-) \frac{dh^-(x)}{dx} + k_x^- B^-(x) u(x, h^-) - q_x^-(x) B^-(x) - k_x^- B^-(x) \Delta_x^-(x), \\ \sigma_y(x, h^-) &= \tau_{xy}(x, h^-) \frac{dh^-(x)}{dx} + k_y^- B^-(x) v(x, h^-) - q_y^-(x) B^-(x) - k_y^- B^-(x) \Delta_y^-(x). \end{aligned} \tag{5}$$

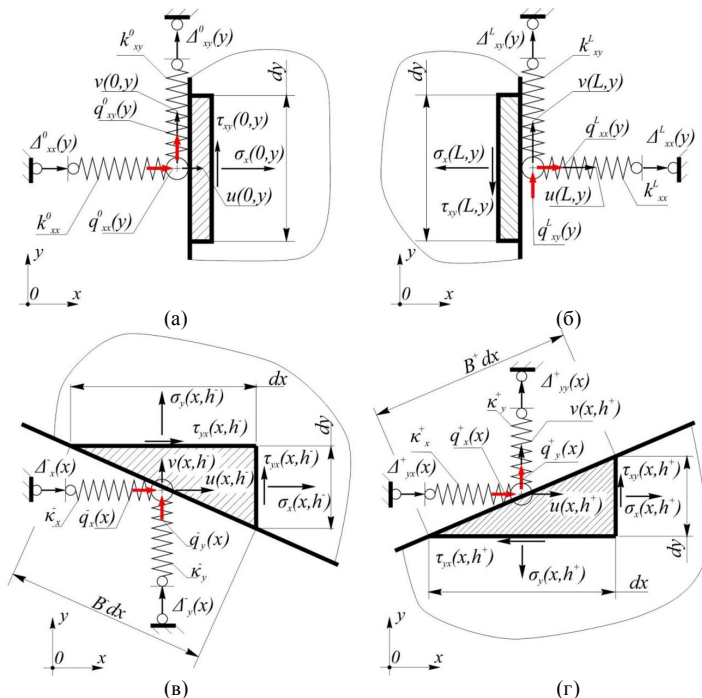


Рис. 2. Граничні умови на бокових поверхнях: (а) ліворуч; (б) праворуч; (в) нижня границя; (г) верхня границя. Граничні умови (3) - (4) є природними граничними умовами загального вигляду, що необхідно для застосування метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова при зниженні вимірності вихідних рівнянь (1) [9]

Кожен вертикальний переріз області D , що відповідає конкретному значенню $x \in (0, D)$, ділимо на $N-1$ рівних частин:

$$\Delta(x) = \frac{h^+(x) - h^-(x)}{N-1}.$$

Отримані N точок для кожного x утворюють N геометричних місць точок, що є в загальному випадку кривими лініями (рис. 1), рівняння яких має вигляд:

$$\varphi_i(y) = h^-(x) + \Delta(x) \cdot (i-1), (i = \overline{1, N}). \quad (6)$$

В частинному випадку прямокутної області D побудовані лінії є прямими, з якими пов'язують назву метода прямих. В даній роботі це криві, і саме із цими лініями пов'яжемо систему локально зосереджених функцій $\varphi_i(x, y)$ (рис. 3).

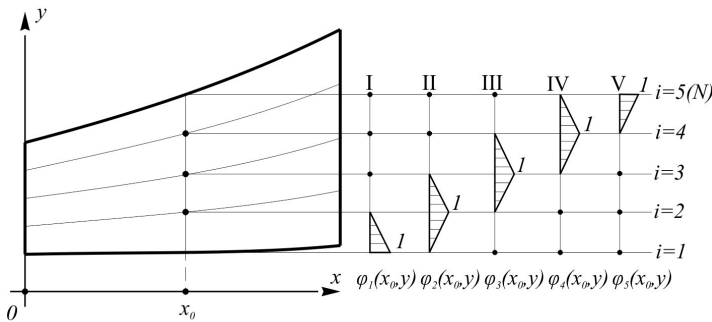


Рис. 3. Локально зосереджені базисні функції

Кожну розрахункову функцію вихідних рівнянь (1) шукаємо наближено як елемент N -вимірного лінійного простору із скалярним добутком:

$$(f(x, y), g(x, y)) = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x, y) \cdot g(x, y) dy, \quad (7)$$

вважаючи залежність усіх функцій від x як від параметра.

У відповідному евклідовому просторі система базисних функцій (6) є лінійно-незалежною, але не ортогональною. В зв'язку з цим будемо користуватися розробленим в тензорному численні означеннями, символами та операціями з індексними величинами. По-перше, будемо вважати систему базисних функцій за основний базис, який визначає основний закон перетворення базису (коваріантний, а відповідні індекси розташовані унизу). Будуються матриця компонентів двічі коваріантного метричного тензора:

$$\{g_{ij}\} = (\varphi_i(x, y), \varphi_j(x, y)) = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \varphi_i(x, y) \cdot \varphi_j(x, y) dy = \frac{1}{\Delta(x)} \{\tilde{g}_{ij}\}, \quad (8)$$

де матриця:

$$\{\tilde{g}_{ij}\} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Далі будується взаємний базис $\{\varphi^i\} (i=1, N)$, елементи якого перетворюються за контрваріантним законом (індекс вгорі), і визначається за співвідношенням:

$$g_{ij}(x) \cdot g^{j\alpha}(x) = \delta_i^\alpha, \quad (10)$$

де δ_i^α - символ Кронекера, або мішаний метричний тензор,

$$\delta_i^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = \alpha \\ 0, & \text{якщо } i \neq \alpha. \end{cases}$$

Практично при достатньо високому N спочатку треба знаходити матрицю компонентів двічі контрваріантного метричного тензора, як обернену до матриці компонентів двічі коваріантного метричного тензора:

$$\{g^{ij}(x)\} = \{g_{ij}(x)\}^{-1} = \frac{1}{\Delta(x)} \{\tilde{g}_{ij}\}^{-1}. \quad (11)$$

Далі знаходимо елементи взаємного базису як лінійну комбінацію елементів основного, використовуючи операцію підймання індексу:

$$\varphi^i(x, y) = g^{ij}(x) \cdot \varphi_j(x). \quad (12)$$

Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування в межах області визначення індексу (узгодження Ейнштейна).

Щоб отримати редуковані рівняння в коефіцієнтах, кожне з вихідних рівнянь (1) множиться на базисну функцію взаємного базису та інтегрується за y в межах від $h^-(x)$ до $h^+(x)$. Для першого рівняння (1) маємо:

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \varphi^i \right) = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (\sigma_x, \varphi^i) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}, \varphi^i \right). \quad (13)$$

Тут:

$$(\sigma_x, \varphi^i) = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \sigma_x(x, y) \cdot \varphi^i(x, y) dy = \sigma_x^i(x)$$

- момент відносно взаємного базису, або коефіцієнт відносно основного базису.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}, \varphi^i \right) &= \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{v}_j^i(x) \cdot \varphi_j(x, y)) \cdot g^{j\alpha}(x) \cdot \varphi_\alpha(x, y) dy = \\ &= g^{j\alpha}(x) \cdot \tilde{v}_j^i(x) \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \varphi_\alpha(x, y) \frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial y} dy = g^{j\alpha}(x) \cdot b_{\alpha j} \cdot \tilde{v}_j^i(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Тут позначено:

$$b_{\alpha j} = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \varphi_\alpha(x, y) \frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial y} dy.$$

Ця числова матриця наведена в роботі [7].

Для обчислення першої складової рівняння (13) необхідно знайти похідну за x від інтеграла зі змінними за x межами інтегрування та такого, підінтегральна функція якого залежить від параметра x .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} u(x, y) \cdot \varphi^i(x, y) dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} u(x, y) \cdot g^{ij}(x) \cdot \varphi_j(x, y) dy = \\ &= \frac{dh^+(x)}{dx} \cdot u(x, h^+(x)) \cdot g^{ij}(x) \cdot \varphi_j(x, h^+(x)) - \\ &- \frac{dh^-(x)}{dx} \cdot u(x, h^-(x)) \cdot g^{ij}(x) \cdot \varphi_j(x, h^-(x)) + \\ &+ \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \varphi^i(x, y) dy + \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} u(x, y) \frac{\partial g^{ij}(x)}{\partial x} \cdot \varphi_j(x, y) dy + \\ &\int_{h^-(x)}^{h^+(x)} u(x, y) \cdot g^{ij}(x) \frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial x} dy, \end{aligned}$$

з якого випливає основне співвідношення:

$$\begin{aligned} \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \varphi^i(x, y) dy &= \frac{du^i(x)}{dx} + \frac{1}{\Delta(x)} \cdot \frac{d\Delta(x)}{dx} \cdot u^i(x) - \\ &- g^{ij}(x) \cdot d_{j\alpha}(x) \cdot u^\alpha(x) - \frac{dh^+(x)}{dx} \cdot g^{iN}(x) \cdot u^N(x) + \frac{dh^-(x)}{dx} \cdot g^{i1}(x) \cdot u^1(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Тут матриця

$$d_{j\alpha}(x) = \int \varphi^i(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial x} dy = \frac{1}{\Delta(x)} \cdot \frac{d\Delta(x)}{dx} = d_{j\alpha}$$

наведена в роботі [9].

Використовуючи отримані співвідношення (13), (14), (15), отримуємо перше редуковане рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}^i(x)}{dx} &= -\frac{1}{\Delta(x)} \cdot \frac{d\Delta(x)}{dx} \cdot \tilde{u}^i(x) + g^{ij}(x) \cdot d_{j\alpha}(x) \cdot \tilde{u}^\alpha(x) + \\ &+ \frac{dh^+(x)}{dx} \cdot g^{iN}(x) \cdot u^N(x) - \frac{dh^-(x)}{dx} \cdot g^{i1}(x) \cdot u^1(x) - \end{aligned}$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot g^{ij}(x) \cdot b_{j\alpha}(x) \cdot u^\alpha(x) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \sigma_x^i(x). \quad (16)$$

Аналогічно отримуємо друге редуковане рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}^i(x)}{dx} = & -g^{ij}(x) \cdot b_{j\alpha} \cdot \tilde{u}^\alpha(x) - \frac{1}{\Delta(x)} \cdot \frac{d\Delta(x)}{dx} \tilde{v}^i + g^{ij}(x) \cdot d_{j\alpha}(x) \cdot \tilde{v}^\alpha(x) + \\ & + \frac{dh^+(x)}{dx} \cdot g^{iN}(x) \cdot \tilde{v}^N(x) - \frac{dh^-(x)}{dx} \cdot g^{i1}(x) \cdot \tilde{v}^1(x) + \tau_{xy}^i. \end{aligned} \quad (17)$$

Зниження вимірності третього рівняння має одну особливість. Після множення скалярно на $\varphi^i(x, y)$ в третьому вихідному рівнянні є складова

$$\left(\frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y}, \varphi^i \right) = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y} \cdot \varphi^i(x, y) dy.$$

Яку не можна безпосередньо інтегрувати, використовуючи розклад напруження за базисом [12], оскільки спочатку необхідно «пом'якшити» інтегрування, переносячи похідну від напруження на базисну функцію за допомогою інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y} \cdot \varphi^i(x, y) dy &= \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y} \cdot g^{ij}(x) \cdot \varphi_j(x, y) dy = \\ &= g^{ij}(x) \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y} \cdot \varphi_j(x, y) dy = \\ &= g^{ij}(x) \left[\tau_{xy}(x, y) \cdot \varphi_j(x, y) \Big|_{h^-(x)}^{h^+(x)} - \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \tau_{xy}(x, y) \frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial y} \cdot dy \right] = \\ &= g^{ij}(x) \left[\tau_{xy}^N(x) \cdot \delta_j^N - \tau_{xy}^1(x) \cdot \delta_j^1 - \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \tau_{xy}^\alpha(x) \cdot \varphi_\alpha(x, y) \frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial y} \cdot dy \right] = \\ &= g^{iN}(x) \cdot \tau_{xy}^N(x) - g^{i1}(x) \cdot \tau_{xy}^1(x) - g^{ij}(x) \cdot b_{\alpha j} \cdot \tau_{xy}^\alpha(x). \end{aligned}$$

Редукуючи першу складову третього рівняння системи (1) аналогічно до редукування першого рівняння остаточно отримуємо третє редуковане рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^i(x)}{\partial x} = & -\frac{1}{\Delta(x)} \cdot \frac{d\Delta(x)}{dx} \cdot \sigma_x^i(x) + g^{ij}(x) \cdot d_{j\alpha}(x) \cdot \sigma_x^\alpha(x) + \\ & + \frac{dh^+(x)}{dx} \cdot g^{iN}(x) \cdot \sigma_x^N(x) - \frac{dh^-(x)}{dx} \cdot g^{i1}(x) \cdot \sigma_x^1(x) - \\ & - g^{iN}(x) \cdot \tau_{xy}^N(x) + g^{i1}(x) \cdot \tau_{xy}^1(x) + g^{ij}(x) \cdot b_{\alpha j}(x) \cdot \tau_{xy}^\alpha(x) - XX^i(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Складові четвертого рівняння системи (1) редукуються аналогічно відповідним складовим третього рівняння, але після редукування з отриманого рівняння необхідно виключити $\sigma_y^i(x)$, скориставшись співвідношенням (2), яке попередньо редукується:

$$\sigma_y^i(x) = \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ij}(x) \cdot b_{j\alpha}(x) \cdot \tilde{v}^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \sigma_x^i(x). \quad (19)$$

Остаточно отримуємо четверте редуковане рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{xy}^i(x)}{dx} &= g^{iN}(x) \cdot B^+(x) \cdot k_y^+ \cdot \tilde{v}^N(x) + g^{i1}(x) \cdot B^-(x) \cdot k_y^- \cdot \tilde{v}^1(x) + \\ &+ \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{iN}(x) \cdot b_{\alpha j}(x) \cdot g^{\alpha\beta}(x) \cdot b_{\beta\gamma}(x) \cdot \tilde{v}^\gamma(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ij}(x) \cdot b_{\alpha j}(x) \cdot \sigma^\alpha(x) - \\ &- \frac{1}{\Delta(x)} \cdot \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x} \cdot \tau_{xy}^i(x) + g^{ij}(x) \cdot d_{\alpha j}(x) \cdot \tau_{xy}^\alpha(x) - Y Y^i(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Праві частини третього та четвертого редукованих рівнянь мають вигляд:

$$\begin{aligned} X X^i(x) &= X^i + q^{iN}(x) \cdot [B^+(x) \cdot q_x^+(x) + B^+(x) \cdot k_x^+ \cdot \Delta_x^+(x)] + \\ &+ q^{i1}(x) \cdot [B^-(x) \cdot q_x^-(x) + B^-(x) \cdot k_x^- \cdot \Delta_x^-(x)], \\ Y Y^i(x) &= Y^i + q^{iN}(x) \cdot [B^+(x) \cdot q_y^+(x) + B^+(x) \cdot k_y^+ \cdot \Delta_y^+(x)] + \\ &+ q^{i1}(x) \cdot [B^-(x) \cdot q_y^-(x) + B^-(x) \cdot k_y^- \cdot \Delta_y^-(x)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Вони враховують усі можливі зовнішні впливи (крім температури) від зовнішнього середовища – об'ємні силові впливи $X(x, y)$ та $Y(x, y)$, поверхневі впливи - силові $q_x(x, y)$, $q_y(x)$, та кінематичні $\Delta_x(x)$, $\Delta_y(x)$ на бокові поверхні $y = h^-(x)$, $y = h^+(x)$.

З граничних умов загального вигляду на торцях $x = 0$ та $x = L$ отримуємо граничні умови для редукованих рівнянь також за допомогою проєкційного методу. Оскільки при вибраному вигляді вихідних рівнянь ці умови є алгебраїчними рівняннями, то вони дуже просто переходять до редукованих, якщо кожне із них помножити на $\varphi^i(x, y)$ та проінтегрувати за y :

- при $x = 0$

$$\begin{aligned} k_{xx}^0 \cdot u^i(0) - \sigma_x^i(0) &= k_{xx}^0 \cdot \Delta_{xx}^{0,i} + q_{xx}^{0,i}, \\ k_{xy}^0 \cdot v^i(0) - \tau_{xy}^i(0) &= k_{xy}^0 \cdot \Delta_{xy}^{0,i} + q_{xy}^{0,i}, \end{aligned} \quad (22)$$

- при $x = L$

$$\begin{aligned} k_{xx}^L \cdot u^i(L) + \sigma_x^i(L) &= k_{xx}^L \cdot \Delta_{xx}^{L,i} + q_{xx}^{L,i}, \\ k_{xy}^L \cdot v^i(L) - \tau_{xy}^i(L) &= k_{xy}^L \cdot \Delta_{xy}^{L,i} + q_{xy}^{L,i}. \end{aligned} \quad (23)$$

Редуковані граничні умови дозволяють ставити граничні задачі для редукованих рівнянь.

Висновок. За допомогою проєкційного метода та розкладу за базисом в лінійному N -вимірному евклідовому просторі з використанням тензорної символіки на основі вихідних рівнянь теорії пружності побудовано редуковані рівняння в коефіцієнтах, які пропонується використовувати для наближеного розв'язку досить складних задач теорії пружності за допомогою методу дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа/ Л.В. Канторович, Крылов В.И. – М. – М.: Гостехиздат, 1949. – 709с.
2. *Канторович, Л.В.* Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // Известия Академии наук СССР. Серия 7. Отделение математических и естественных наук. - М. ; Л., 1933. – Вып. 5. - С. 647-652. - Отд. оттиск.
3. *Винокуров Л.П.* Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. – Харьков. Изд-во Харьк. Ун-та, 1956. – 279 с.
4. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – Т.16. – 1961. - Вып.3. С.171-174.
5. *Шкелев Л.Т.* Метод прямых и его использование для определения напряженного и деформированного состояний пластин и оболочек / Л.Т. Шкелев, Ю.А. Морсков, Т.А. Романова, А.Н. Станкевич – Киев: Национальная академия наук Украины, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. – 177с.
6. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояния пространственных и пластинчатых конструктивных элементов: монография / Л.Т. Шкелев [и др.]. - К.: КНУСА, 2004. – 136 с.
7. *Станкевич А.М.* До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих / А.М. Станкевич., В.К. Чибіряков., Л.Т. Шкельов // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – Вип. 36. – С. 413-423.
8. *Чибіряков В.К.* Модифікований метод прямих в задачах статичної та динамічної масивних конструкцій / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., Д.В. Левківський., В.Д. Мельничук // Вісник ОДАБА. – 2016. – Вип. 61. – Одеса. – С.412-423.
9. *Чибіряков В.К.* Зниження вимірності рівнянь статичної товстої пластини змінної товщини узагальненим методом прямих / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., А.А. Сташук // Опір матеріалів і теорія споруд. – Вип. 85. К.; КНУБА. – 2012. - С.58-67.
10. *Чибіряков В.К.* Узагальнений метод прямих в задачах теорії пружності для областей складної форми / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., А.О. Краснеєва., О.А. Шорін // Вісник ОДАБА. – 2017. – Вип. 67. – Одеса. – С.71-76.
11. *Чибіряков В.К.* Про одну розрахункову модель для дослідження деформацій дамб і гребель та обґрунтування точності геодезичних спостережень / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., В.С. Староверов., Г.С. Акчуріна., О.А. Шорін // Інженерна геодезія. – 2016. – Вип. 63. – К.; КНУБА. – С.21-30.
12. *Марчук Г.И.* Введение в проекционно-сеточные методы./Г.И. Марчук., В.И. Агашков. – М.; Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. – 416с.

REFERENCES

1. *Kantorovich L.V.* Priblizhennyye metody vyshego analiza (The approximate method of the highest analysis)/ L.V. Kantorovich, V.I. Krylov. – М. – М.: Gostekhizdat, 1949. – 709s.
2. *Kantorovich L.V.* Odin pryamoj metod priblizhennogo resheniya zadachi o minimum dvoynogo integral (The one straight method of the approximate solution the task with a double integral minimum) // Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya 7. Otделение matematicheskikh I estestvennykh nauk. - M. ; L., 1933. – Vyp. 5. - S. 647-652. - Otd. otisk.
3. *Vinokurov L.P.* Pryamyje metody resheniya prostranstvennykh i kontaknykh zadach dlya massivov i fundamentov(The direct method to solve the space and contact problem for the massive and base). – Kharkov. Izd-vo Khar. Un-ta, 1956. – 279 s.
4. *Godunov S.K.* O chislennom reshenii kraevykh zadach dlya system lineynykh obyknovennykh differentsialnykh uravnenii(About numerical solution boundary tasks for the system of ordinary differential equations) / S.K. Godunov // Uspekhi matematicheskikh nauk. – T.16. – 1961. - Vyp.3. S.171-174.
5. *Shkeliov L.T.* Metod pryamykh i ego ispolzovanie dlya opredeleniya napryazhennogo i deformirovannogo sostoyaniya plastin i obolochek(Applications method of lines to define the tension-deformation state of the plates and encasement) / L.T. Shkeliov, Yu.A. Morskov, T.A. Romanova, A.N. Stankevich – Kiev: Natsionalnaya akademiya nauk Ukrainy, Institut mekhaniki im. S.P. Timoshenko, Tekhnicheskii tsentr, 2002. – 177s.
6. Primenenie metoda pryamykh dlya opredeleniya napryazhennogo i deformirovannogo sostoyaniya prostranstvennykh i plastinchatykh konstruktivnykh elementov(Applications

- method of lines to define the tension-deformation state of the space construction and the plate construction elements): monografiya / L.T. Shkeliov [i dr.]. - K.: KNUSA, 2004. - 136 s.
7. *Stankevich A.M.* Do znyzhennya vymirnosti granychnykh zadach teorii pruzhnosti za metodom pryamykh (Dimensional reduction a boundary conditions of the theory of elasticity in the method of lines) / A.N. Stankevich., V.K. Chybiryakov., L.T. Shkeliov // Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya. – 2010. – Vyp. 36. – S. 413-423.
 8. *Chybiryakov V.K.* Modifikovanyi metod pryamykh v zadakhkh statyki ta dynamiki masyvnykh konstruksii (The modified method of lines in problems of a statics and dynamics of the massive construction) / V.K. Chybiryakov., A.M. Stankevich., D.V. Levkivskyi., V.D. Melnichuk // Visnyk ODABA. – 2016. – Vyp. 61. – Odesa. – S.412-423.
 9. *Chybiryakov V.K.* Znyzhennya vymirnosti rivnyann statyki tovstoi plastyny zminnoi tovshyny uzagalnenym metodom pryamykh (Dimensional reduction static equations of large plate of variable thickness by generalized method of “lines”) / V.K. Chybiryakov., A.M. Stankevich., A.A. Stashchuk // Opir materialiv i teoriya sporud. – Vyp. 85. K.; KNUBA. – 2012. - S.58-67.
 10. *Chybiryakov V.K.* Uzagalnenyi metod pryamykh v zadakhkh teorii pruzhnosti dlya oblasti skidsnoi formy (Generalized method of lines in tasks of the theory of elasticity in irregular shape area) / V.K. Chybiryakov., A.M. Stankevich., A.O. Krasneeva., O.A. Shorin // Visnyk ODABA. – 2017. – Vyp. 67. – Odesa. – S.71-76.
 11. *Chybiryakov V.K.* Pro odnu rozrakhunkovu model dlya doslidzhennya deformatsii damb i grebel ta obgruntuvannya tochnosti geodezichnykh sposterezhen (About one computational model for research strain of dams and justification accuracy of geodetic observations) / V.K. Chybiryakov., A.M. Stankevich., V.S. Staroverov., G.S. Akchurina., O.A. Shorin // Inzhenerna geodeziya. – 2016. – Vyp. 63. – K.; KNUBA – S.21-30.
 12. *Marchuk G.I.* Vvedenie v proektsionno setochnye metody (Introduction in the projection-mesh method) / G.I. Marchuk., V.I. Agoshkov. – M.; Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury. 1981. – 416s.

Стаття надійшла 21.05.2018

Shorin A.A.

ABOUT ONE VERSION OF ONE-DIMENSIONS EQUATIONS FOR RESEARCH STRESS-STRAIN STATE OF NON THIN PLATE WITH VARIABLE THICKNESS

The Method of lines is one of the oldest combined approaches to the solutions of tasks in the structural mechanic. This method was founded at the beginning of 1930 by academician L.V. Kantorovich, the method has kept all the main features in our time – assumed function a continuous by one variable and a discrete by another variable.

At the first stage in the classic method of lines, the dimension of the space coordinates assumed equations has reduced with the help of finite-difference method. At the second stage, reduced equations are solving by an analytic or numerical method.

In works of V.K. Chybiryakov and A.M. Stankevich is offered at the first stage in the method of lines for reduction equations apply a projective method of Bubnov-Galerkin-Petrov, which ability is wider in particular for more effective use at the second stage of modern numerical methods.

This version of reduced dimensions in our work allows generalizing the method of lines for objects more irregular shape instead of a classic version. In this work, more convenient version of reduction one dimension equations (equations in coefficients) is constructed. Corresponding boundary conditions include power and kinematic impact from an environment. The boundary task is set, which we suggest solving by the method of discrete orthogonalization of S.K. Godunov.

In this article are considered the version of use generalized method of lines for the solution of tasks of the theory of elasticity in a flat region which have an irregular shape. The area is limited to two straight lines parallel to one of the coordinate axes, and two curves which are a function graph of other coordinate.

Keywords: theory of elasticity, method of line, numerical-analytic method, method of projections, one-dimension boundary task, flat deformation, tension-deformation state, reduction equations, method of discrete orthogonalization, the plate of variable thickness.

Шорін А.А.

ПРО ОДИН ВАРИАНТ ОДНОМЕРНЫХ РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НДС НЕТОНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В статье рассматривается обобщение метода прямых на исследование напряженно-деформированного состояния пластин достаточно сложной формы в постановке плоской задачи теории упругости (плоская деформация или плоское напряженное состояние), которые ранее не рассматривались классическим вариантом метода прямых. Построена система расчетных уравнений, поставлены граничные задачи, которые предлагается решать эффективным численным методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Ключевые слова: теория упругости, метод прямых, численно-аналитический метод, проекционный метод, одномерные граничные задачи, плоская деформация, напряженно-деформированное состояние, редуцированные уравнения, метод дискретной ортогонализации, пластина переменной толщины.

УДК 539.3

Шорін О.А. Про один варіант одновимірних розрахункових рівнянь для дослідження НДС нетонких пластин змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 191-201.

Розглядається узагальнення методу прямих на дослідження напружено-деформованого стану пластин досить складної форми, в постановці плоскої задачі теорії пружності, які раніше не розглядалися класичним варіантом методу прямих. Побудовано систему розрахункових рівнянь, поставлено граничні задачі, які передбачається розв'язувати ефективним чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Табл. 0. Іл. 3. Бібліогр. 12 назв.

Shorin A.A. About one version of one-dimensions equations for research stress-strain state of non thin plate with variable thickness // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 191-201. – Ukr.

The generalization of the method of straight lines to the study of the stress-strain state of plates of a rather complex shape in the formulation of a plane problem of the theory of elasticity, which was not previously considered by the classical version of the method of straight lines, is considered. A system of computational equations is constructed, boundary problems are posed, which are proposed to be solved by an effective numerical method of discrete orthogonalization of Godunov.

Tables 0. Fig. 3. Ref. 12.

Шорін О.А. Об одном варианте одномерных расчетных уравнений для исследования НДС нетонких пластин переменной толщины // Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. - Вип. 100. - С. 191-201.

Рассматривается обобщение метода прямых на исследование напряженно-деформированного состояния пластин достаточно сложной формы в постановке плоской задачи теории упругости, которые ранее не рассматривались классическим вариантом метода прямых. Построена система расчетных уравнений, поставлены граничные задачи, которые предлагается решать эффективным численным методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Табл. 0. Ил. 3. Библиогр. 12 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): аспірант, ШОРИН Олександр Анатолійович

Адреса робоча: 03037, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський Національний Університет Будівництва та Архітектури, Шорін Олександр Анатолійович

Робочий тел.: +38(044)2415441

Мобільний тел.: +38(098) 9526246

E-mail: shorin@i.ua

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ТРІЩИНОСТІЙКОСТІ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ФОРМОЗМІНЕННЯ

Ю.В. Максим'юк,

канд. техн. наук, доцент

*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680*

В даній роботі проведено узагальнення модифікованого методу реакцій для обчислення лінійних і нелінійних параметрів механіки руйнування в змішаних задачах при розвитку під дією зовнішніх навантажень великих деформацій пластичності. Достовірність результатів обґрунтована шляхом розв'язання тестових прикладів і наведені результати розрахунку конкретних об'єктів.

Ключові слова: тріщиностійкість, формозмінення, вісесиметричні тіла, модифікований метод реакцій, лінійні і нелінійні параметри механіки руйнування, стопорний клапан парової турбіни, компактний зразок.

Вступ. Вихідні співвідношення, прийняті в даній роботі відповідають вимогам індиферентності, енергетичної сумісності і об'єктивності похідних при визначенні їх прирощень [7]. Скінченноелементна база включає просторові [5], оболонкові [1] і універсальні СЕ [8], що забезпечує можливість побудови оптимальних дискретних моделей вісесиметричних тіл складної структури. Крім того, цьому суттєво сприяє використання багато фрагментного підходу формування сіткових областей [2]. Зв'язок між напруженнями і деформаціями здійснюється в межах теорії пластичної течії [6]. В якості критеріїв механіки руйнування прийняті коефіцієнт інтенсивності напружень K , J -інтеграл і прирощення енергії деформування пов'язаної з прирощенням довжини тріщини G .

Визначення K базується на усередненні значень напружень і переміщень по деякій під області, параметри якої дозволяють уникнути суттєвого зменшення розмірів СЕ в при вершинній області тріщини [10]. Обчислення G відбувається шляхом інтегрування прирощень енергії, як за мередіональним перетеном тіла обертання, так і за параметром навантаження при розв'язку задач пластичності кроковим методом [11].

Оскільки досить широке розповсюдження в науковій літературі і в ліцензійних програмних комплексах набуло використання в якості критерію J -інтеграл, його обчислення при розробці даного підходу було приділено досить значна увага. На першому етапі була реалізована загально прийнята процедура обчислення J -інтеграла через значення напружень і деформацій [3]. Проведені дослідження показали, що такий підхід не завжди забезпечує його індеферентність. Тому на другому етапі розроблено варіант реалізації на основі значень вузлових реакцій і переміщень [4], для якого теоретично доведено його інваріантність для дискретних моделей МСЕ. На наступному етапі запропонована і обґрунтована ефективність модифікованого метода реакцій [12], що дозволяє суттєво спростити процедуру програмної реалізації.

Мета роботи полягає в апробації згаданих вище трьох варіантів обчислення J-інтеграла при розв'язанні фізичної і геометричної задач і розрахунку тріщиностійкості вісесиметричних і плоско-деформованих тіл конкретних об'єктів.

1. Ефективність і достовірність модифікованого методу реакцій. 3

метою обґрунтування ефективності і достовірності використання модифікованого методу реакцій для обчислення J-інтеграла, в умовах плоскої деформації з урахуванням геометричної нелінійності, було розглянуто тестовий приклад про розтяг нескінченної пластини з тріщиною скінченної довжини $2l=2\text{ см}$ (рис. 1(а)), дискретна модель якої наведена на рис. 1(б). Вихідні дані: розтягуюче зусилля $q=100\text{ кг/см}^2$; модуль пружності $E=10^n\text{ кг/см}^2$ змінюється в інтервалі значень показника ступеня n від 3 до 4, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.333$.

Наведені на рис. 2 графіки дозволяють зробити висновок, що модифікований варіант $J(1/2uR)$ і основний варіант методу реакцій $J(\text{PuR})$ практично співпадають.

Для доведення високої ефективності модифікованого варіанту методу реакцій при розв'язанні задач з урахуванням фізичного та геометрично нелінійного деформування, було розглянуто тестовий приклад про деформування прямокутної пластини з боковою тріщиною рис. 3.

Матеріал об'єкту – сталь 12Х2МФА, фізико-механічні характеристики якої $E=2.05 \times 10^5\text{ МПа}$, $\nu=0.3$ [9]. Закон пластичного деформування має наступний вигляд:

$$\bar{\sigma}/\sigma_m = 1 + 0.645(\bar{\varepsilon}_p)^{0.388}, \quad (1)$$

де $\sigma_m = 637\text{ МПа}$ – межа текучості; $\bar{\sigma}$ – інтенсивність нормальних напружень; $\bar{\varepsilon}_p$ – інтенсивність деформацій.

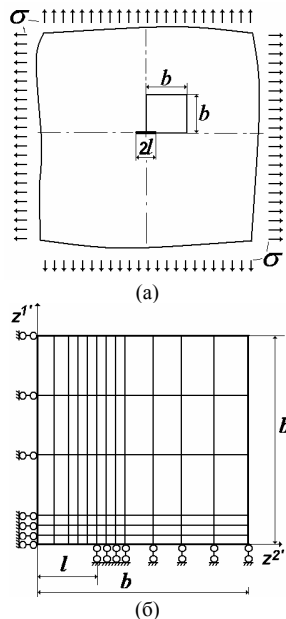


Рис. 1

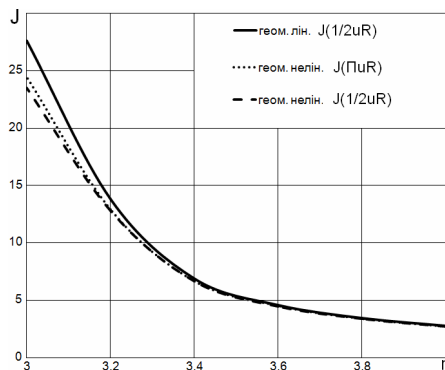


Рис. 2

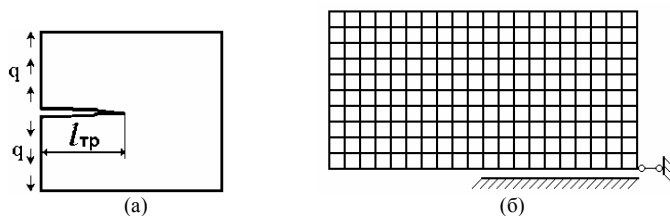


Рис. 3

Розвиток деформацій пластичності та залежності J -інтеграла при збільшенні навантаження показані на рис. 4(а) і 5(а) для плоскої деформації та на рис. 4(б) і 5(б) для плоско напруженого стану відповідно.

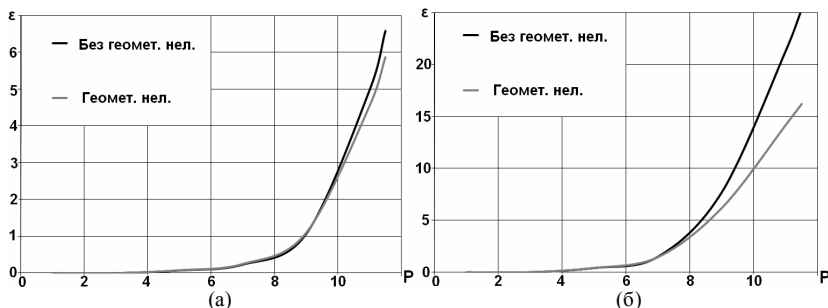


Рис. 4

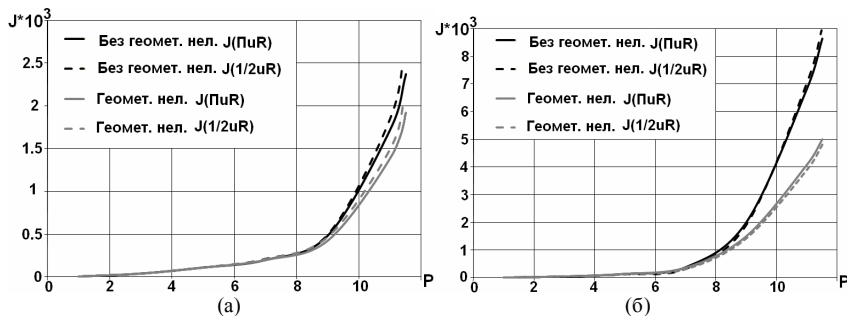


Рис. 5

Наведені результати показують, що як для плоско деформованого так і для плоско напруженого станів розв'язки задач в пружно-пластичній постановці отримані модифікованим методом реакцій, на рисунку позначені $J(1/2uR)$ і основним методом реакцій, на рисунку позначені $J(\Pi uR)$ практично збігаються між собою. Аналогічний результати отримані і у випадку урахування геометричної нелінійності.

Таким чином, проведене в даній роботі порівняння підходів до обчислення J -інтеграла в скінченноелементних задачах показало, що при використанні однакових дискретних моделей похибки обчислення контурного J -інтеграла за величинами напружень і градієнтів переміщень є меншими, ніж при використанні методів еквівалентного об'ємного інтегрування і методу похідної від жорсткості. Подання контурного J -

інтеграла через вузлові реакції і переміщення (модифікований метод реакцій) дозволяє зменшити ці похибки ще в два рази. Також модифікований метод реакцій може бути застосований для розрахунку тіл обертання та плоскодеформованих тіл в геометрично і фізично нелінійних задачах.

2. Визначення величини ресурсу корпусу стопорного клапана з урахуванням геометричної нелінійності при дискретному руйнуванні. Розроблена методика була використана при розрахунку корпусу стопорного клапану парової турбіни на рис. 6(a). Даний об'єкт представляє собою масивне тіло обертання складної форми.

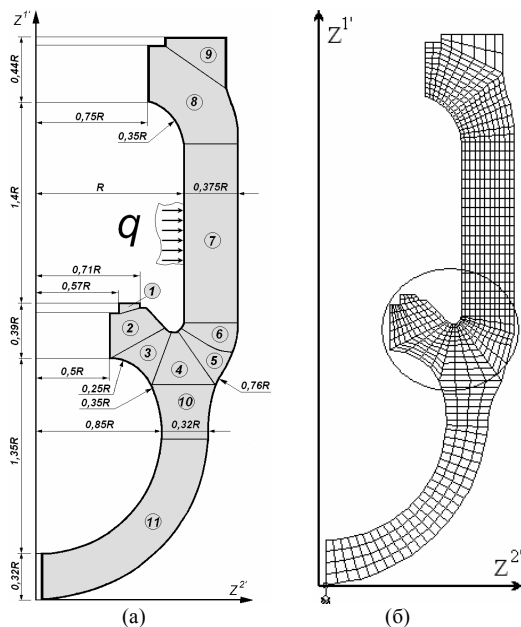


Рис. 6

В верхній частині – це циліндр, довжиною $2R$, товщиною $0,375R$, в нижній частині – півсфера, товщиною $0,32R$, і радіусом $0,85R$, де R – внутрішній радіус циліндра. Розрахункова схема з розбивкою на фрагменти приведена на рис. 6(a), де всі розміри представлені відносно до внутрішнього радіуса циліндра R . В верхній частині циліндра кріпиться кришка за допомогою болтів, рівномірно розмішених по колу. Перехідна частина від циліндра до сфери має виступ для запору стопорного клапана. Матеріал конструкції характеризується наступними механічними параметрами: коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$, модуль пружності $E=205800 \text{ МПа}$. В напрямку осі обертання геометричні і механічні характеристики не змінюється. Дискретна модель виконана без кришок стопорного клапана, які замінені на зосереджені сили, на виступі від клапана, і верхній частині циліндра від закладки кришки (рис. 6(б)). Навантаження представляє собою рівномірно розподілений тиск по внутрішній поверхні циліндричної частини коробки. Скінчено елемента модель виконана таким чином, щоб можна було згущувати сітку в

прогнозованому місці появи тріщини, використовуються СЕМ з кількістю невідомих 1712 і 6894.

Результати дослідження напружено-деформованого стану коробки стопорного клапану від внутрішнього тиску $q=0,1$ МН/м² показані у вигляді графіків безрозмірної інтенсивності напружень, що розподіляються по галтелі забору клапану (рис. 7(a)), та вздовж радіусу циліндра (рис. 7(б)).

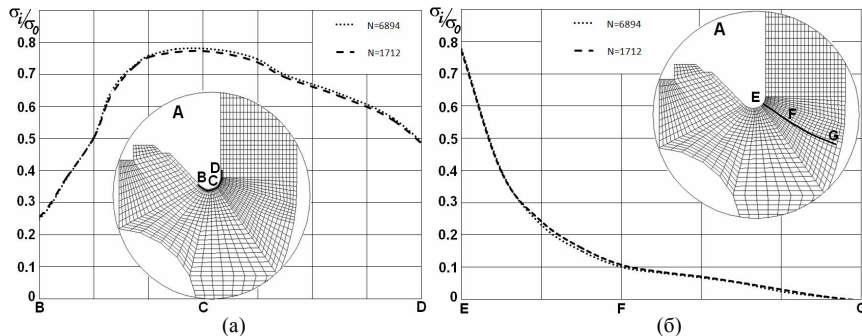


Рис. 7

Отримані результати показують непогану збіжність результатів на різних СЕМ. Оскільки на запорі клапану напруження максимальні, то саме це місце являється найбільш вірогідним для виникнення і розвитку тріщини.

Для руйнування змішаного типу, при $K_I \neq 0$, $K_{II} \neq 0$ умова руйнування має вигляд $\tilde{K} = K_{Ic}$ де $\tilde{K} = \sqrt{K_I^2 + 1,78K_{II}^2}$. Із графіка залежності \tilde{K}/K_{Ic} від довжини тріщини l (рис. 8) видно, що в інтервалі довжин тріщини $(0,2...0,6)h$ величина \tilde{K}/K_{Ic} змінюється несуттєво, і лише при наближенні вершини тріщини до зовнішньої поверхні клапану спостерігається його поступове прискорене збільшення. Також на даному графіку видно, що результати отримані модифікованим методом реакцій нічим не поступаються отриманих в роботі [4]. Катастрофічне руйнування відбудеться при виконанні умови $\tilde{K} = K_{Ic}$ по досягненні тріщиною довжини $0,83h$.

Обґрунтуванням можливості застосування співвідношень лінійної механіки руйнування до розв'язання даної задачі служить мала величина пластичної зони у вершині тріщини, розмір якої обчислювався за формулою:

$$r_p = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi} \left(\frac{\tilde{K}}{\sigma_T} \right)^2. \quad (2)$$

Відношення r_p/l в діапазоні до $l \leq 0,8h$ не перевищувало $1/500$, що свідчить про квазікрихкий характер руйнування конструкції. Таким чином, тріщина довжиною $l \leq 0,6h$ є припустимою.

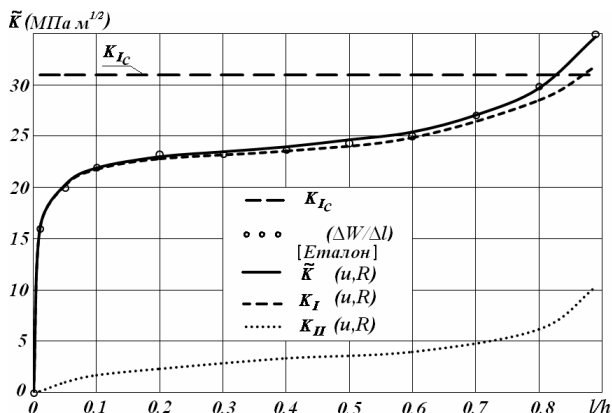


Рис. 8

Врахування формозмінення показало, що зменшення коефіцієнтів інтенсивності на 2-3% в межах критичної довжини тріщини призводить до збільшення ресурсу більш ніж на 12%.

3. Дослідження впливу геометричної нелінійності на деформування та визначення J-інтеграла компактного зразку. Для дослідження впливу геометричної нелінійності на параметри напружено-деформованого стану та величину J-інтеграла розглянуто компактний зразок (рис. 9(a)) результати розрахунку якого без урахування геометрично нелінійного деформування наведені в монографії Е.М. Морозова, Г.П. Нікішкова [9]. Розрахункова схема з урахуванням симетрії об'єкта подана на (рис. 9(б)) ($W=100$ мм, $W_1=1,25 W$, $H=0,6W$, $H_1=0,325W$, $D=0,25W$, L – довжина тріщини, $L/W=0,5$).

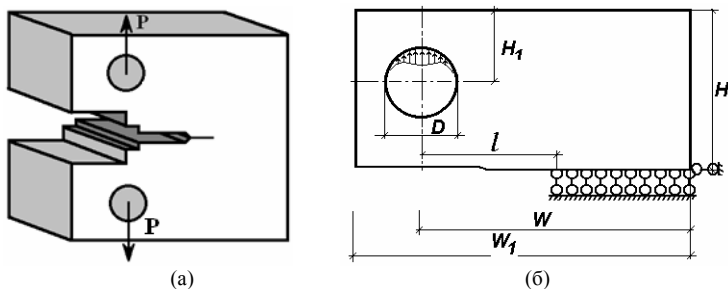


Рис. 9

Розрахунок виконаний при розподіленні прикладеного зусилля P за синусоїдальним законом, яке змінюється при плоско деформованому стані від 0 до 9000 кг, а при плоско напруженому стані від 0 до 7000 кг. Матеріал зразка – сталь 12Х2МФА. Пластичне деформування матеріалу із достатнім ступенем точності апроксимується залежністю

$$\sigma_i = \sigma_T \left(1 + 6.45 \epsilon_p^{0.388} \right), \quad (3)$$

Напруження текучості, при якому появились перші пластичні деформації, дорівнюють $\sigma_T = 637 \text{ МПа}$ [9].

Дискретна скінченоелементна модель компактного зразку будувалася з використанням квазірегулярної схеми за допомогою якої сітка була згущена в місцях виникнення найбільших напружень і структура сітки аналогічна наведеній в роботі [9] і показана на рис. 10.

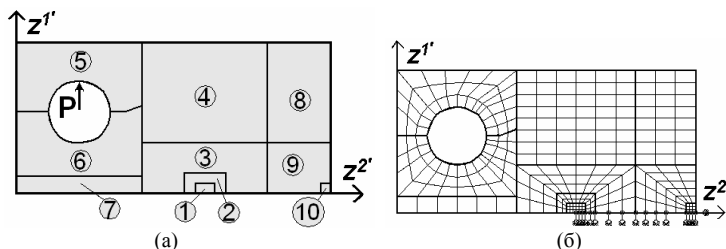


Рис. 10

На рис. 11 наведена залежність J-інтеграла від величини навантаження при пружно-пластичному деформуванні, яка збігається із наведеною в роботі [9], як для плоско деформованого стану (рис. 11(а)) так і плоско напруженого стану (рис. 11(б)).

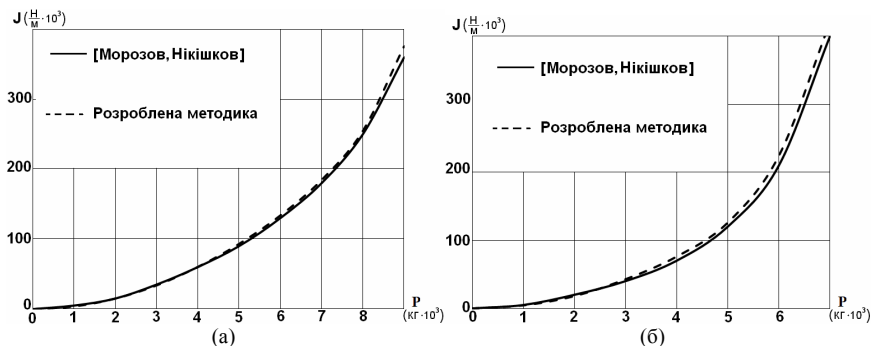


Рис. 11

Наступний етап розрахунку полягав в дослідженні впливу геометричної нелінійності на параметри напружено-деформованого стану компактного зразка. Залежність розвитку деформацій пластичності при збільшенні навантаження для обох постановок зображена на (рис. 12(а)) з урахуванням і без урахування формозмінення. Розкриття тріщини в компактному зразку під час деформування при $P=9000 \text{ кг}$ зображене на (рис. 12(б)) при фізично нелінійному розв'язку без та з урахуванням геометричної нелінійності для плоскої деформації (PD) та плоско напруженого стану (PNS).

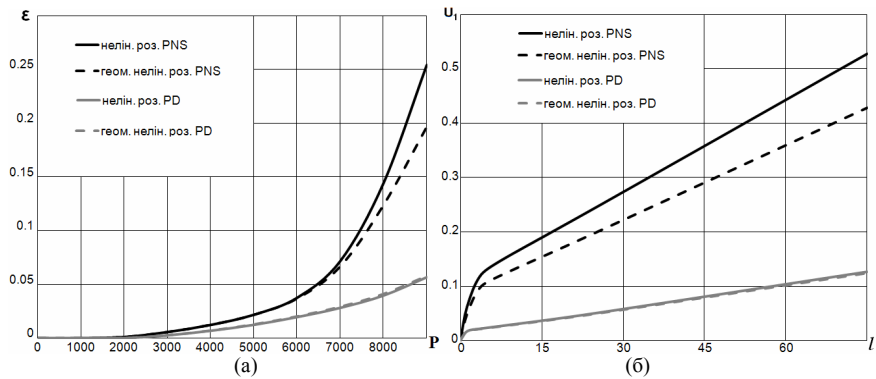


Рис. 12

На рис. 13 наведені графіки переміщень для плоскої деформації (PD) та плоско напруженого стану (PNS) з урахуванням і без урахування формозмінення в вузлах дискретної моделі, які знаходяться найближче до вершини тріщини (перший вузол від закріплення) та найвіддаленіше (край компактного зразку).

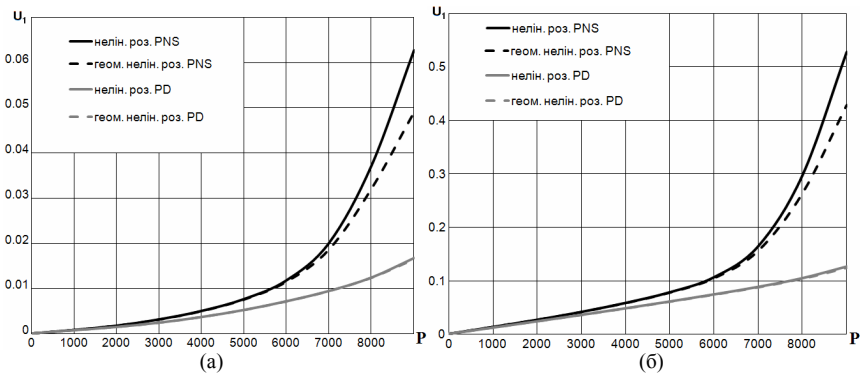


Рис. 13

Аналіз наведених графіків дозволяє зробити висновок, що врахування геометричної нелінійності зменшує значення величин деформацій та переміщень. Це повністю співпадає з висновками, які наведені в попередніх роботах для тестових прикладів.

На рис. 14 зображені графіки значень J-інтеграла в залежності від інтенсивності навантаження P з урахуванням і без урахування формозмінення у випадку плоскої деформації (PD) (рис. 14(a)) і плоско напруженого стану (PNS) (рис. 14(б)) спостерігається розбіжність максимальних значень J-інтеграла в межах 9% для плоско деформованого стану, та в півтора рази для плоско-напруженого стану.

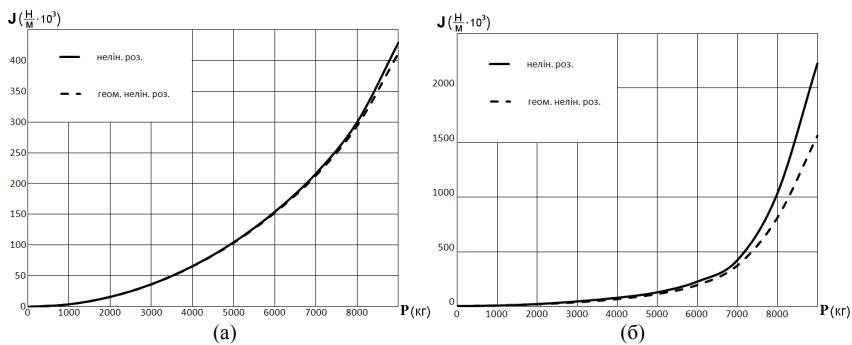


Рис. 14

Це свідчить про суттєвий вплив геометричної нелінійності, як і на загальну картину напружено-деформованого стану так і на максимальні значення J - інтеграла.

Таким чином, можна зробити висновок, що коректне визначення J -інтеграла компактного зразка необхідно виконувати в фізично і геометрично нелінійній постановці.

Висновок. В даному розділі отримані розв'язки нових прикладних задач будівельної механіки про вплив формозмінення на величини ресурсу і тріщиностійкості конструктивних елементів машинобудівної промисловості в експериментальних зразках для визначення параметрів тріщиностійкості.

Виявлено, що незважаючи на відносно незначні зміни параметрів пружно-деформованого стану в межах 3% величина ресурсу збільшилася на 12% для стопорного клапана порівняно з геометрично лінійним розрахунком, що має суттєве значення для визначення терміну експлуатації даного об'єкту. Розрахунок компактного зразка при плоско деформованому та плоско напруженому станах показав необхідність урахування геометричної нелінійності для коректного отримання значень характеристик руйнування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонки і пластин / В.А. Баженов, О.С. Сахаров, О.І. Гулярь, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2017. - Вип.92. – С. 3-16.
2. *Баженов В. А.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія / В. А. Баженов, О. І. Гулярь, С. О. Пискунов, О. С. Сахаров – К.: КНУБА, 2014. – 235 с.
3. *Баженов В. А.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 1. Теоретические основы и исследование эффективности конечно-элементной методики решения пространственных задач механики разрушения / Баженов В. А., Гулярь А. И., Пискунов С. О. [и др.] // *Проблемы прочности.* - 2011. – Вип. 1. – С. 27-39.
4. *Баженов В. А.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 2. Методика определения инвариантного J -интеграла в дискретных моделях МКЭ. / Баженов В. А., Гулярь А. И., Пискунов С. О. [и др.] // *Проблемы прочности.* - 2011. – Вип. 2. – С. 17-32.

5. Гуляр О.І. Ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. - Вип.89. – С. 43-57.
6. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974.– 312 с.
7. Максим'юк Ю.В. Индиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості. / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. - Вип.99. – С. 151-159.
8. Максим'юк Ю.В. Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. - Вип.94. – С. 244-251.
9. Морозов Е. М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. – М. : Наука, 2007. – 256 с.
10. Пискунов С.О. Прямий метод визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних та просторових незамкнених тілах обертання при статичному навантаженні. / С.О.Пискунов, О.О.Шкриль, С.В.Мицюк, Б.І.Сизевич // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2016. - Вип.97. – С. 16-27.
11. Шкриль О.О. Визначення G-інтеграла на основі обчислення інваріантних об'ємних інтегралів методом реакцій. / О.О.Шкриль // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. - Вип.98. – С. 31-42.
12. Bazhenov V.A. A Modified Method for Evaluating the Invariant J-Integral in Finite-Element Models of Prismatic Bodies / V.A.Bazhenov, A.S.Sakharov., Y.V.Maksim'yuk., A.A.Shkryl' // International Applied Mechanics 52(2), 2016, pp. 140-146.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A. Osoblivosti vikoristannya momentnoyi shemi skinchenih elementiv (MSSE) pri neliniynih rozrahunkah obolonok i plastin (Peculiarities of using the finite element moment scheme (FEMS) in nonlinear calculations of shells and plates) / V.A. Bazhenov, O.S. Saharov, O.I. Gulyar, C.O. Piskunov, Yu.V. Maksim'yuk // Opir materialiv i teoriya sporud. – 2017. - Vip.92. – S. 3 16.
2. Bazhenov V.A. Napivanalitichnyi metod skinchennih elemeniv v zadachah kontinualnogo ruynuvannya prostorovih til : Monografiya (Semibanalytic method of finite elements in problems of the continual destruction of spatial bodies) / V.A. Bazhenov, O.I. Gulyar, S.O. Piskunov, O.S. Saharov – K. : KNUBA, 2014. – 235 s.
3. Bazhenov V.A. Reshenie lineynyih i nelineynyih prostranstvennyih zadach mehaniki razrusheniya na osnove poluanaliticheskogo metoda konechnyih elementov. Soobschenie 1. Teoreticheskie osnovyi i issledovanie effektivnosti konechno-elementnoy metodiki resheniya prostranstvennyih zadach mehaniki razrusheniya (Solution of linear and nonlinear spatial problems of fracture mechanics based on the semi-analytical finite element method. Message 1. Theoretical foundations and investigation of the effectiveness of a finite-element method for solving spatial problems of fracture mechanics) / Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O. [i dr.] // Problemyi prochnosti. 2011. – Vip. 1. – S. 27 39.
4. Bazhenov V.A. Reshenie lineynyih i nelineynyih prostranstvennyih zadach mehaniki razrusheniya na osnove poluanaliticheskogo metoda konechnyih elementov. Soobschenie 2. Metodika opredeleniya invariantnogo J-integrala v diskretnyih modelyah MKE. (Solving linear and nonlinear spatial problems of fracture mechanics based on the semi-analytical finite element method. Message 2. Method of determining the invariant J-integral in discrete models of FEM) / Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O. [i dr.] // Problemyi prochnosti. 2011. – Vip. 2. – S. 17-32.
5. Gulyar O.I. Efektivnist momentnoyi shemi skinchenih elementiv (MSSE) v zadachah zginu ta z konsentrotorami napruzhen (Efficiency of the finite element moment scheme (FEMS) in bending problems and stress concentrators) / O.I. Gulyar, S.O. Piskunov, I.I. Solodey, Yu.V. Maksim'yuk // Opir materialiv i teoriya sporud. – 2012. - Vip.89. – S. 43 57.
6. Качанов Л.М. Основы механики разрушения.(Fundamentals of Fracture Mechanics) – М.: Наука, 1974.– 312 с.
7. Максим'юк Ю.В. Индиферентност тензорив деформаций, напружен та их прирощен при умови енергетичної сполученості. (The indifference of tensors of deformations, stresses and their increments under the condition of energy interconnection) / Ю.В. Максим'юк // Оpir materialiv i teoriya sporud. – 2017. - Vip.99. – S. 151 159.
8. Максим'юк Ю.В. Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів (Calculated ratios of a universal finite element

- based on a finite element timing scheme) / Yu.V. Maksim'yuk // *Opir materialiv i teoriya sporud.* – 2015. - Vip.94. – S. 244-251.
9. *Morozov E. M.* Metod konechnykh elementov v mehanike razrusheniya (The finite element method in fracture mechanics) / E.M. Morozov, G. P. Nikishkov. – M. : Nauka, 2007. – 256 s.
 10. *Piskunov S.O.* Pryamiy metod viznachennya koefitsientiv intensivnosti napruzhen v prizmatichnih ta prostорових nezamknenih tilah obertannya pri statichnomu navantazheni. (Straight line wise codename method i t mat ensiv ensiv ensiv ensiv nap nap nap v priz in prismatic and open spaces in a static wrapper with static navantazheni) / S.O.Piskunov, O.O.ShkriI, S.V.Mitsyuk, B.I.Sizevich // *Oplr materialiv I teoriya sporud.* – 2016. - Vip.97. – S. 16-27.
 11. *ShkriI O.O.* Viznachennya G-integrala na osnovi obchislennya invariantnih ob'emnih integraliv metodom reaktsiy. (The value of the G-integral on the basis of the equivalent of the other internal integrals by the method of reactions) / O.O.ShkriI // *Oplr materialiv I teoriya sporud.* – 2017. - Vip.98. – S. 31-42.
 12. *Bazhenov V.A.* A Modified method for evaluating the invariant J-integral in finite-element models of prismatic bodies / V.A.Bazhenov, A.S.Sakharov., Y.V.Maksimyuk., A.A.Shkryl' // *International Applied Mechanics* 52(2), 2016, pp. 140-146.

Стаття надійшла до редакції 05.03.2018 р.

Maksymiuk Yu.

DETERMINATION OF THE FRACTURE RESISTANCE OF AXISYMMETRIC BODIES, TAKING INTO ACCOUNT THE CHANGE OF THE SHAPE

In this paper, a generalization of the modified reaction method for calculating linear and nonlinear parameters of fracture mechanics in mixed problems with development under the influence of external loads of large deformations of plasticity has been carried out. The reliability of the results is substantiated by solving test cases and the results of the calculation of specific objects are given.

Possibilities of the methodology for investigating the processes of destruction of this class of objects are largely due to the efficiency of the finite element scheme for obtaining the calculated relations, the method of calculating the parameters of the destruction mechanics.

The spatial nature of the problems of the destruction mechanics leads to the necessity of using CEs, which are based on the relations of the theory of elasticity, even in the evaluation of the cracking strength of thin-walled shell objects, not to mention the bodies of a complex structure. It is in these cases that the use of universal CEs developed on the basis of MCCE in the formation of a general discrete design model is particularly evident

In the works [3, 4, 12] devoted to the development of effective energy approaches to the determination of the parameters of linear and nonlinear destruction mechanics, the advantage of the reaction method has been convincingly proved with the existing ones. Therefore, further generalization and development of the modified method of reactions to new classes of problems of destructive mechanics, related to the development of methods for mathematical modeling of the development of trunk cracks in the thermosensitive load and form-modification, are sufficiently substantiated and promising.

Determining the parameters of local fracture destruction is an important, but partial, problem of fracture mechanics. In practice, there are cases where a small initial small fracture is known and it is necessary to determine the conditions for the destruction of the structure, that is, the critical length of the crack at a given load. At the same time, the correctness of calculating the trajectory of the crack development depends to a large extent on the reliability of the entire calculation, since calculating the parameters of destruction along the trajectory, which does not coincide with the real one, can lead to an incorrect assessment of the bearing capacity of the structure as a whole.

It should be noted that a small amount of work is devoted to the simulation of crack development with the help of ITU [2]. Therefore, the development of effective algorithms in this direction is an actual problem of the mechanics of cracks.

In this paper, the focus is on the use of universal CEs [8], which allows to optimize discrete models of ITE when calculating the bodies of a complex structure. Determination of the parameters of destructive mechanics is realized by the modified reaction method, whose effectiveness in the case of mixed destruction is demonstrated in [3, 4].

Key words: physical and geometric nonlinearity, thin-walled massive and combined axisymmetric bodies, indifference, condition of energy connectivity, initial reckoning, intermediate variable reckoning and actual configuration.

Максимюк Ю.В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ

В данной работе проведено обобщение модифицированного метода реакций для вычисления линейных и нелинейных параметров механики разрушения в смешанных задачах при развитии под действием внешних нагрузок больших деформаций пластичности. Достоверность результатов обоснована путем решения тестовых примеров и приведены результаты расчета конкретных объектов.

Ключевые слова: физическая и геометрическая нелинейность, тонкостенные массивные и комбинированные осесимметричные тела, индифферентность, условие энергетической сопряженности, начальная отсчетной, промежуточная переменная отсчетной и актуальная конфигурация.

УДК 539.3

Максим'юк Ю.В. Визначення тріщиностійкості вісесиметричних тіл з урахуванням формо зміння // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 202-213.

В даній роботі проведено узагальнення модифікованого методу реакцій для обчислення лінійних і нелінійних параметрів механіки руйнування в змішаних задачах при розвитку під дією зовнішніх навантажень великих деформацій пластичності. Достовірність результатів обґрунтована шляхом розв'язання тестових прикладів і наведені результати розрахунку конкретних об'єктів.

Табл. 0. Іл. 14. Бібліогр. 12 назв.

UDC 539.3

Maximiyuk Yu.V. **Determination of the fracture resistance of axisymmetric bodies taking into account the change of the shape** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 202-213.

In this paper, a generalization of the modified reaction method for calculating linear and nonlinear parameters of fracture mechanics in mixed problems with development under the influence of external loads of large deformations of plasticity has been carried out. The reliability of the results is substantiated by solving test cases and the results of the calculation of specific objects are given.

Tabl. 0. Il. 14. Ref. 12.

УДК 539.3

Максимюк Ю.В. Определение трещиностойкости осесимметричных тел с учетом формы изменения // Сопроотивление материалов и теория сооружений. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 202-213.

В данной работе проведено обобщение модифицированного метода реакций для вычисления линейных и нелинейных параметров механики разрушения в смешанных задачах при развитии внешних нагрузок больших деформаций пластичности. Достоверность результатов обоснована путем решения тестовых примеров и приведены результаты расчета конкретных объектов.

Табл. 0. Ил. 14. Библиограф. 12 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА МАКСИМ'ЮК Юрій Всеволодович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельної механіки, Максим'юк Юрій Всеволодович.

Адреса домашня: Україна, м. Київ, вул. Кривоноса Максима, 6, кв. 322/3.

Робочий тел.: +38(044) 241-55-38;

Мобільний тел.: +38(067) 230-94-72;

E-mail: maximiyuk@ukr.net

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

ЗМІСТ

<i>Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.</i> Invariant torus break-down in vibroimpact system – route to <i>crisis</i> ? . . .	3
<i>Nguyen Ngoc Thang, Nguyen Anh Tuan</i> Nonlinear fem analysis of cement column configuration in the foundation improved by deep mixing method	18
<i>Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Kostina O.V.</i> Definition of the failure region of the oil tank with wall imperfections in combined loading	27
<i>Демчина Б.Г., Осадчук Т.Ю.</i> Визначення міцності та довговічності скла на основі лінійно- пружної механіки руйнування	40
<i>Ворона Ю.В., Кара І.Д., Щербій В.І.</i> Граничноелементна методика дослідження коливань пружних масивів з урахуванням випадкового характеру констант матеріалу . . .	59
<i>Бараненко В.О., Волчок Д.Л.</i> Нечітке моделювання в оптимальному проектуванні шарнірно- стержневих систем	71
<i>Курєннов С.С.</i> Напружений стан клейового з'єднання з поздовжнім дефектом . . .	94
<i>Єгоров Є.А., Кучеренко О.Є.</i> Нелінійна оптимізація топології просторових стержневих систем . .	105
<i>Савін О.Б., Соболев В.М.</i> Змішаний варіаційний функціонал в задачах повзучості та пошкоджуваності стержнів при згині	115
<i>Kitov Yu.P., Verevicheva M.A., Vatulia G.L., Deryzemlia S.V.</i> Design solutions of optimal systems under action of dead and live mobile load	124
<i>Bilyk S.I., Bilyk A.S., Nilova T.O., Shpynda V.Z., Tsyupyn E.I.</i> Buckling of the steel frames with the I-shaped cross-section columns of variable web height	140
<i>Краснєєва А.О.</i> Про один алгоритм чисельно-аналітичного розв'язування плоских задач теорії пружності для областей неканонічної форми	155

Varabash M.

Some aspects of modelling nonlinear behaviour of reinforced concrete . 164

Іванченко Г.М., Пікуль А.В.

Тестування збіжності МСЕ на задачах теорії пружності при використанні просторового криволінійного СЕ 172

Гапонова Л.В., Калмиков О.О., Гребенчук С.С.

Раціоналізація параметрів залізобетонних анізотропних оболонок . 181

Шорін О.А.

Про один варіант одновимірних розрахункових рівнянь для дослідження НДС нетонких пластин змінної товщини 191

Максим'юк Ю.В.

Визначення тріщиностійкості вісесиметричних тіл з урахуванням формозмінення 202

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД
STRENGTH OF MATERIALS AND THEORY OF STRUCTURES

Науково-технічний збірник
Scientific-and-technical collected articles

Випуск 100

Головний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 25.05.18. Формат 60x90 ¹/₁₆. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.
Тираж 100.

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.
